ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.П. Орлов

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЛН И АКУСТИКИ

Учебное пособие

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Содержание

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \sum_{i=1}^{3} v_i \partial \mathbf{v}/\partial x_i = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}(t,x), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = (f_1, f_2, f_3)$ - плотность внешних сил. Первое уравнение здесь называется уравнением Эйлера, или уравнением движения, второе - уравнением неразрывности.

Выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \partial/\partial x_i$$

называется субстанциональной производной. Субстанциональная производная - это производная вдоль траектории движения частицы. Выясним ее смысл. Пусть $A(\mathbf{x},t)$ - произвольная скалярная функция. Производная функции $A(\mathbf{u}(\mathbf{X},t),t)$ определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\mathbf{u}(\mathbf{X},t),t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}(\mathbf{X},t)} = \frac{\partial A(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \partial A(\mathbf{x},t)/\partial x_i.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}A(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}A(\mathbf{u}(\mathbf{X},t),t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}(\mathbf{X},t)} = \frac{\partial A(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \partial A(\mathbf{x},t)/\partial x_i.$$

Уравнением неразрывности часто записывают в виде

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{x},t) + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1.4}$$

Система уравнений (1.2)-(1.3) является системой четырех скалярных уравнений для пяти скалярных функций v_1, v_2, v_3, p, ρ. Для разрешимости системы нужно еще одно уравнение. Этим уравнением является так называемое уравнение состояния. Здесь есть варианты.

Если имеется зависимость

$$p = \tilde{p}(\rho),$$

то такая жидкость называется баротропной.

Если в жидкости происходят тепловые процессы, то

$$p = \tilde{p}(\rho, s), \tag{1.5}$$

где $s = s(\mathbf{x}, t)$ новая функция состояния жидкости, называемая энтропией. Если жидкость не обменивается теплом с окружающей средой, то $\frac{d}{dt}s = 0$, и течение жидкости называется изоэнтропичным.

Из (1.5) тогда имеем

$$\frac{d}{dt}p = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(\rho, s)\frac{d}{dt}\rho \tag{1.6}$$

Обозначим

$$c^2 = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(\rho, s). \tag{1.7}$$

Функция c^2 имеет смысл скорости звука в жидкости. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}p = c^2\frac{d}{dt}\rho. \tag{1.8}$$

Обычно скорость звука считается заданной функцией, и уравнение замыкает систему в случае изоэнтропичной жидкости.

Важным для приложений является случай несжимаемой жидкости, а именно жидкости, удовлетворяющей условию $\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{x}, t) = 0$. Из (1.4) в силу $\rho \neq 0$ тогда получаем условие несжимаемости в виде

$$\mathrm{div} = 0. \tag{1.9}$$

В этом случае оказывается, что скорость звука в такой жидкости бесконечно велика, а уравнение (1.8) заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \ \mathrm{div}\ (\rho\mathbf{v}) = 0, \ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{1.10}$$

Отметим часто используемые записи

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}, \quad \sum_{i=1}^{3} v_i \partial\mathbf{v}/\partial x_i = \mathbf{v}\nabla\mathbf{v}.$$

1.2 Гидростатика

Рассмотрим важный случай стационарного течения жидкости, т.е. случай $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})$. При этом предположении уравнение Эйлера имеет вид

$$\nabla p = \rho\mathbf{f}. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) называется уравнением гидростатики. Важен в приложениях случай $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla u$ (потенциальное поле). Тогда (1.11) имеет вид

$$\nabla p = -\rho \nabla u. \tag{1.12}$$

Последнее уравнение далеко не всегда имеет решение (при произвольной u). Но в некоторых важных случаях она разрешима. Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Рассмотрим случай $u = gz$, что соответствует полю тяжести. Тогда в координатах уравнение Эйлера имеет вид (ось z направлена вверх)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{1.13}$$

Следовательно, $p = p(z)$.

Предположим, что жидкость однородна, т.е. $\rho = \mathrm{const}$.

Тогда

$$p = -\rho g z + C. \tag{1.14}$$

Если известно $p(z_0) = p_0$, то

$$p = -\rho g(z - z_0) + p_0. \tag{1.15}$$

1.3 Условие гидростатического равновесия. Частота Вяйсяля

Выясним теперь, при каких условиях в поле силы тяжести состояние равновесия будет устойчивым для общего уравнения состояния $p = p(\rho, s)$.

Подставив его в (1.13), получаем

$$-\rho g = \frac{dp}{dz} = c^2 \frac{d\rho}{dz} + Y \frac{\partial s}{\partial z}, \tag{1.16}$$

где $Y = \frac{\partial p}{\partial s}|_\rho$. Рассмотрим частицу жидкости объемом V_0, находящуюся в точке z. На эту частицу действует сила тяжести $-g\rho(z)V_0$ и (если жидкость находится в равновесии) равная ей, но направленная в противоположную сторону сила Архимеда. Если теперь сместить частицу на расстояние ζ, по вертикали, то из-за сжимаемости изменится ее объем на величину $\triangle V$, в то время как ее масса и энтропия сохраняются. В результате сила, действующая на смещенную частицу, будет

$$F = -g\rho(z)V_0 + g(z + \zeta)(V_0 + \Delta V)$$