

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.П. Орлов

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЛН И АКУСТИКИ

Учебное пособие

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Содержание

1	Гидродинамика	5
1.1	Гидродинамика идеальной жидкости	5
1.2	Гидростатика	7
1.3	Условие гидростатического равновесия. Частота Вайсяля . .	8
2	Линейные уравнения для волн в жидкости	10
2.1	Линеаризация уравнений гидродинамики	10
2.2	Уравнения возмущений для несжимаемой жидкости	11
3	Волны	12
3.1	Одномерные волны	12
3.2	Дисперсия волн и групповая скорость	14
3.3	Многомерные плоские волны	16
3.4	Сферические волны. Сферически-симметричное решение волнового уравнения	17
4	Звуковые волны	18
4.1	Система линейных акустических уравнений	19
4.2	Плоские волны	20
4.3	Уравнение Гельмгольца	21
5	Океан как акустическая среда	23
5.1	Скорость звука в морской воде	23
5.2	Типичные вертикальные профили скорости звука	24
5.3	Поглощение звука в воде	29
6	Лучевая теория звукового поля в океане	29
6.1	Рефракция звуковых лучей	30
6.2	Расстояние, проходимое лучом по горизонтали	31
6.3	Уравнения лучевой акустики в трехмерном случае	32
7	Отражение звука. Плоские волны	37
7.1	Коэффициенты отражения и прозрачности на границе двух жидких сред	37
7.2	Прохождение звуковой волны из воды в воздух и обратно . .	40
7.3	Отражение звука от поверхности дна и океана. Точечный излучатель	41

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \sum_{i=1}^3 v_i \partial \mathbf{v} / \partial x_i = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}(t, x), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$ - плотность внешних сил. Первое уравнение здесь называется уравнением Эйлера, или уравнением движения, второе - уравнением неразрывности.

Выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \partial / \partial x_i$$

называется субстанциональной производной. Субстанциональная производная - это производная вдоль траектории движения частицы. Выясним ее смысл. Пусть $A(\mathbf{x}, t)$ - произвольная скалярная функция. Производная функции $A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t), t)$ определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t), t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \partial A(\mathbf{x}, t) / \partial x_i.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} A(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t), t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \partial A(\mathbf{x}, t) / \partial x_i.$$

Уравнением неразрывности часто записывают в виде

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.2)-(1.3) является системой четырех скалярных уравнений для пяти скалярных функций v_1, v_2, v_3, p, ρ . Для разрешимости системы нужно еще одно уравнение. Этим уравнением является так называемое уравнение состояния. Здесь есть варианты.

Если имеется зависимость

$$p = \tilde{p}(\rho),$$

то такая жидкость называется баротропной.

Если в жидкости происходят тепловые процессы, то

$$p = \tilde{p}(\rho, s), \quad (1.5)$$

где $s = s(\mathbf{x}, t)$ новая функция состояния жидкости, называемая энтропией. Если жидкость не обменивается теплом с окружающей средой, то $\frac{d}{dt}s = 0$, и течение жидкости называется изоэнтропичным.

Из (1.5) тогда имеем

$$\frac{d}{dt}p = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(\rho, s)\frac{d}{dt}\rho \quad (1.6)$$

Обозначим

$$c^2 = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(\rho, s). \quad (1.7)$$

Функция c^2 имеет смысл скорости звука в жидкости. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}p = c^2 \frac{d}{dt}\rho. \quad (1.8)$$

Обычно скорость звука считается заданной функцией, и уравнение замыкает систему в случае изоэнтропичной жидкости.

Важным для приложений является случай несжимаемой жидкости, а именно жидкости, удовлетворяющей условию $\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{x}, t) = 0$. Из (1.4) в силу $\rho \neq 0$ тогда получаем условие несжимаемости в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.9)$$

В этом случае оказывается, что скорость звука в такой жидкости бесконечно велика, а уравнение (1.8) заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.10)$$

Отметим часто используемые записи

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}, \quad \sum_{i=1}^3 v_i \partial \mathbf{v} / \partial x_i = \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}.$$

1.2 Гидростатика

Рассмотрим важный случай стационарного течения жидкости, т.е. случай $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})$. При этом предположении уравнение Эйлера имеет вид

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется уравнением гидростатики. Важен в приложениях случай $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla u$ (потенциальное поле). Тогда (1.11) имеет вид

$$\nabla p = -\rho \nabla u. \quad (1.12)$$

Последнее уравнение далеко не всегда имеет решение (при произвольной u). Но в некоторых важных случаях она разрешима. Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Рассмотрим случай $u = gz$, что соответствует полю тяжести. Тогда в координатах уравнение Эйлера имеет вид (ось z направлена вверх)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.13)$$

Следовательно, $p = p(z)$.

Предположим, что жидкость однородна, т.е. $\rho = \text{const}$.

Тогда

$$p = -\rho g z + C. \quad (1.14)$$

Если известно $p(z_0) = p_0$, то

$$p = -\rho g(z - z_0) + p_0. \quad (1.15)$$

1.3 Условие гидростатического равновесия. Частота Вейселя

Выясним теперь, при каких условиях в поле силы тяжести состояние равновесия будет устойчивым для общего уравнения состояния $p = p(\rho, s)$.

Подставив его в (1.13), получаем

$$-\rho g = \frac{dp}{dz} = c^2 \frac{d\rho}{dz} + Y \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (1.16)$$

где $Y = \frac{\partial p}{\partial s}|_\rho$. Рассмотрим частицу жидкости объемом V_0 , находящуюся в точке z . На эту частицу действует сила тяжести $-g\rho(z)V_0$ и (если жидкость находится в равновесии) равная ей, но направленная в противоположную сторону сила Архимеда. Если теперь сместить частицу на расстояние ζ , по вертикали, то из-за сжимаемости изменится ее объем на величину ΔV , в то время как ее масса и энтропия сохраняются. В результате сила, действующая на смещенную частицу, будет

$$F = -g\rho(z)V_0 + g(z + \zeta)(V_0 + \Delta V)$$