$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}, ... = (x_n),$$

x_n – общий член последовательности.

Способы задания последовательности могут быть такие же, как и у других функций:

1. Аналитический. Например, $x_n = \frac{n}{n+1}$, т.е. $(x_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$

2. «Кусочный». Например,

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } n - \text{нечетное} \\ 0 \text{ если } n - \text{четное}, \quad \text{т.е.} \quad (x_n) = 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, ... \end{cases}$$

В отличие от других функций для последовательности есть своеобразный способ задания – **рекуррентный.** Например, $x_1 = \sqrt{2}$; $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ $\forall n \in N$.

Рассмотрим примеры:

1) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$(x_n) = -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; ...$

Какую бы малую окрестность точки $x = 0$ мы ни взяли, вне этой окрестности окажется лишь конечное число членов. Другой такой точки нет. Точка $x = 0$ является пределом этой последовательности. Запишем это так: $\lim(-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

2) $x_n = n$, *т.е.* $(x_n) = 1; 2; 3; 4 ...$ Эта последовательность предела не имеет.

3) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

$(x_n) = -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; \frac{6}{7}; ...$. Члены последовательности как угодно близко подходят к точкам 1 и –1.

Однако вне окрестности точки $x = 1$ имеется бесконечное число членов данной последовательности. Поэтому 1 не является пределом этой последовательности, аналогично – 1 тоже не является пределом.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** (x_n), если какую бы малую окрестность точки a мы ни взяли, вне этой окрестности будет находиться лишь конечное число членов последовательности. Запишем это так: $\lim x_n = a$ или $x_n \to a$.

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае – **расходящейся**.

Определение. Точка a называется пределом последовательности (x_n), если какую бы малую окрестность этой точки мы ни взяли, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадут в эту окрестность, т.е.

$$\lim x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(a,\varepsilon) \exists N \ \forall n \ (n > N) \Rightarrow x_n \in U(a,\varepsilon)$$

или

$$\lim x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \ (n > N) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

1. **Теорема.** Всякая сходящаяся последовательность может иметь только один предел.

Если из данной последовательности удалить часть ее членов, так что в последовательности останется бесконечное число членов, и если оставшиеся члены заново пронумеровать в прежнем порядке, то получится новая последовательность, которая называется **подпоследовательностью** данной последовательности.

2. **Теорема.** Если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность также сходится к тому же пределу.

3. **Теорема.** Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Последовательность может быть ограниченная, но расходящаяся. Например, $x_n = (-1)^n$.

4. **Теорема.** Пусть даны (x_n) и (y_n). Причем $\forall n : x_n \le y_n$, и пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда справедливо $a \le b$.

5. **Теорема.** Пусть $x_n \le y_n \le z_n$. Если крайние последовательности x_n, z_n имеют одинаковый предел, то и промежуточная последовательность y_n также сходится и имеет тот же предел.

Определение. Последовательность α_n называется **бесконечно малой,** если она стремится к 0.

Определение. Под окрестностью $+\infty$ мы будем понимать любой интервал вида $(E, +\infty)$, где $E > 0$, под **окрестностью** $-\infty$ интервал $(-\infty, -E)$, а **под окрестностью** ∞ – объединение интервалов $(-\infty, -E) \vee (E, +\infty)$. Неравенство $|x| > E$ означает: «x принадлежит E-окрестности ∞».

Определение. Последовательность x_n называется **бесконечно большой,** если какую бы окрестность бесконечности мы ни взяли, вне этой окрестности останется лишь конечное число членов в последовательности.

Записывается это так: $\lim x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$. Бесконечно большая последовательность является расходящейся.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Обратное утверждение неверно, т.е. последовательность может быть неограниченной, но не стремиться к бесконечности.

Например:

1) $1; 2; 1; 3; 1; 4; 1; \ldots$

2) $x_n = \left(1 + (-1)^n\right) n$, т.е. $(x_n) = 0; 4; 0; 8; 0; 12; \ldots$

Теорема. 1) Если α_n – бесконечно малая последовательность, члены которой отличны от нуля, то $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ – бесконечно большая.

2) Если x_n – бесконечно большая последовательность, члены которой отличны от нуля, то $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ – бесконечно малая последовательность.

Практические задания

1. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} + \ln(2x - 1)$

б) $f(x) = \dfrac{2x}{3 + 2x - x^2}$

в) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 3}} - \lg(2x - 3)$

2. Для функции найти ей обратную:

а) $y = 2x + 5$ б) $y = \dfrac{x - 3}{2}$ в) $y = \sqrt{4 - 5x}$

3. Найти значение функции при данных значениях переменной:

$f(x) = \dfrac{\lg(5 - x)}{x^2 - x}$, $x = 4$; $x = c$

4. Исследовать функцию на четность, нечетность:

$f(x) = \dfrac{x^4}{\sin x} - x^3 \ln(1 + x^2)$

5. Даны функции, заполните таблицу:

1) $y = 3x^2 + \sin x$; 2) $y + \ln xy = \cos\dfrac{x}{y}$; 3) $y = \mathrm{tg}(x^2 + 7x)$;

4) $y = \cos(2x + 3)$; 5) $y = (5x^3 + 2x)\ln x$; 6) $\dfrac{y}{x} + 5^{x+y} = \ln y$;

7) $y = \cos(x^3 + 2y) - \sin 3x$; 8) $y = \arccos(\dfrac{3x^2 - 2x}{5x + 3})$; 9) $y - 3x^2 + \cos 3x = 5$.

Функция задана в явном виде	Функция задана в неявном виде	Функция является сложной	Функция не является сложной

6. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4+(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

7. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

8. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$.

9. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

Задания для самостоятельного решения:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)})}{\sqrt{n}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$. 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

2 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

1. Техника вычисления предела функции в точке.
2. Техника вычисления предела функции на бесконечности.

Теоретическая часть

Рассмотрим функцию $y=f(x)$.Придавая переменной x различные значения, получим x_1; x_2; x_3; $\ldots x_n\ldots$ – последовательность значений аргумента. Ей соответствует: $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(x_3)$; …; $f(x_n)$; … – последовательность соответствующих значений функции.

Если из того, что любая последовательность значений аргумента, взятая из области определения функции и ε – окрестности точки x_0 ($x_n \neq x_0$), сходится к x_0 ($x \to x_0$) следует, что последовательность соответствующих значений функции сходится к числу A ($f(x) \to A$), то число A называется **предeлом функции $f(x)$ в точке x_0.**

Обозначение: $\lim\limits_{n \to x_0} (x) = A$.

Если $\lim\limits_{n \to x_0} (x) = 0$, то функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y = x - 4$ при $x \to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = +\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Замечание. Данные выше определения справедливы и при $x \to \pm\infty$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$.

Если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Предел бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \text{если } f(x) \sim f_1(x),\ \ \varphi(x) \sim \varphi_1(x).$$

При вычислении пределов функций обычно пользуются следующими основными **теоремами о пределах**:

если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} q(x)$ существуют и конечны, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, где $c = \text{const}$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

ŋqdqqaeY bŁ dəpƎbYəe d eɐɐqɔɐ Jqdqɐqaè