

УДК 519.85(075)  
ББК 22.174я7  
О-52

*Серия основана в 2007 г.*

Рецензенты:

академик РАО, доктор педагогических наук, профессор *А. А. Кузнецов*  
доктор технических наук, профессор *В. Н. Комаров*

**Окулов С. М.**

О-52 Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике : учебное пособие / С. М. Окулов. — 5-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 425 с. — (Педагогическое образование). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-703-9

В учебном пособии даны ключевые разделы дискретной математики с практической реализацией алгоритмических решений. Книга написана на основе лекционного курса и практических занятий для студентов факультета информатики Вятского государственного гуманитарного университета, а также спецкурса, читаемого автором для школьников, занимающихся информатикой по углубленной программе.

Для студентов высших учебных заведений, а также старшеклассников, углубленно изучающих информатику.

**УДК 519.85(075)**  
**ББК 22.174я7**

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике : учебное пособие / С. М. Окулов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 422 с. : ил. — (Педагогическое образование). — ISBN 978-5-94774-498-9.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

ISBN 978-5-93208-703-9

© Лаборатория знаний, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Основные методы дискретной математики (счет и перебор)</b>	<b>10</b>
1.1. Счет и перебор . . . . .	10
1.2. Асимптотические обозначения и основная теорема . . . . .	17
1.3. Эффект «комбинаторного взрыва» . . . . .	20
<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	22
<i>Комментарии</i> . . . . .	24
<b>Глава 2. Основные комбинаторные принципы и понятия в примерах</b>	<b>25</b>
2.1. Принципы сложения и умножения . . . . .	25
2.2. Подмножества . . . . .	25
2.3. Принцип включения и исключения . . . . .	26
2.4. Выборки . . . . .	28
2.5. Размещения с повторениями . . . . .	28
2.6. Размещения без повторений . . . . .	29
2.7. Сочетания без повторений . . . . .	30
2.8. Бином Ньютона и полиномиальная формула (комбинаторный смысл) . . . . .	32
2.9. Сочетания с повторениями . . . . .	33
2.10. Перестановки без повторений . . . . .	33
2.11. Перестановки с повторениями . . . . .	38
2.12. Задача о размещениях . . . . .	39
2.13. Разбиения . . . . .	42
2.14. Разбиения на циклы . . . . .	43
2.15. Разбиение числа на слагаемые . . . . .	45
<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	46
<i>Комментарии</i> . . . . .	51

<b>Глава 3. Перечисление комбинаторных объектов</b>	<b>52</b>
3.1. Общая схема генерации комбинаторных объектов	52
3.2. Генерация перестановок без повторов	53
3.3. Генерация сочетаний без повторов	54
3.4. Генерация размещений без повторов	55
3.5. Генерация перестановок с повторениями	57
3.6. Генерация сочетаний с повторениями	57
3.7. Генерация размещений с повторениями	57
3.8. Генерация подмножеств	58
3.9. Генерация разбиений	60
3.10. Генерация разбиений на циклы	66
3.11. Генерация разбиений числа на слагаемые	73
<i>Упражнения и задачи</i>	74
<i>Комментарии</i>	75
<b>Глава 4. Рекуррентные и нерекуррентные формулы</b>	<b>76</b>
4.1. Простые примеры	76
4.2. Числа Фибоначчи	77
4.3. Числа Каталана	82
4.4. Схема нахождения общего решения линейных рекуррентных уравнений	86
4.5. Производящие функции	90
4.6. Ладейные полиномы	97
4.7. Аддитивность задач, или динамическое программирование	101
<i>Упражнения и задачи</i>	106
<i>Комментарии</i>	110
<b>Глава 5. Понятие графа, основные методы просмотра вершин графа</b>	<b>111</b>
5.1. Терминология	111
5.2. Способы представления графа	112
5.3. Поиск в глубину	114
5.4. Поиск в ширину	116
5.5. Основные понятия	117
<i>Упражнения и задачи</i>	124
<i>Комментарии</i>	129
<b>Глава 6. Деревья</b>	<b>130</b>
6.1. Определение дерева	130
6.2. Перечисление остовных деревьев связного помеченного графа	131
6.3. Матричная формула Кирхгофа	134

6.4.	Алгоритм представления дерева в виде последовательности чисел . . . . .	135
6.5.	Остовные деревья минимального веса . . . . .	137
6.6.	Задача Штейнера . . . . .	141
	<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	143
	<i>Комментарии</i> . . . . .	144
<b>Глава 7.</b>	<b>Связность</b> . . . . .	<b>145</b>
7.1.	Вершинная и реберная связность . . . . .	145
7.2.	Метод нахождения блоков графа . . . . .	147
7.3.	Теорема Менгера . . . . .	149
7.4.	Связность в орграфе . . . . .	151
	<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	154
	<i>Комментарии</i> . . . . .	155
<b>Глава 8.</b>	<b>Циклы</b> . . . . .	<b>156</b>
8.1.	Эйлеровы графы . . . . .	156
8.2.	Гамильтоновы графы . . . . .	158
8.3.	Фундаментальное множество циклов . . . . .	161
8.4.	Матроиды . . . . .	166
	<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	172
	<i>Комментарии</i> . . . . .	173
<b>Глава 9.</b>	<b>Покрытия и независимость</b> . . . . .	<b>174</b>
9.1.	Основные понятия . . . . .	174
9.2.	Метод генерации всех максимальных независимых множеств вершин графа . . . . .	175
9.3.	Клики . . . . .	179
9.4.	Доминирующие множества . . . . .	180
9.5.	Паросочетания . . . . .	185
9.6.	Матроиды трансверсалей . . . . .	196
9.7.	Диаграмма взаимосвязей между задачами . . . . .	198
	<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	201
	<i>Комментарии</i> . . . . .	203
<b>Глава 10.</b>	<b>Планарные графы</b> . . . . .	<b>204</b>
10.1.	Основные понятия . . . . .	204
10.2.	Формула Эйлера . . . . .	204
10.3.	Алгоритм укладки графа на плоскости . . . . .	206
	<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	214
	<i>Комментарии</i> . . . . .	215

<b>Глава 11. Раскраска вершин графа</b> . . . . .	<b>216</b>
11.1. Хроматическое число . . . . .	216
11.2. Метод правильной раскраски . . . . .	217
11.3. Методы поиска минимальной раскраски . . . . .	219
<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	222
<i>Комментарии</i> . . . . .	223
<b>Глава 12. Кратчайшие пути в графе</b> . . . . .	<b>224</b>
12.1. Постановка задачи. Вывод пути . . . . .	224
12.2. Алгоритмы поиска кратчайших путей . . . . .	226
<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	234
<i>Комментарии</i> . . . . .	235
<b>Глава 13. Поток в сетях</b> . . . . .	<b>236</b>
13.1. Основные понятия и постановка задачи . . . . .	236
13.2. Алгоритм К. Эдмондса—Р. Карпа . . . . .	237
13.3. Введение в метод блокирующих потоков или алгоритм Е. А. Диница . . . . .	244
13.4. Модификация алгоритма Е. А. Диница . . . . .	252
<i>Упражнения и задачи</i> . . . . .	260
<i>Комментарии</i> . . . . .	262
Ответы и решения . . . . .	263
Задачи для самостоятельного решения . . . . .	353
<b>Приложение 1. Математические факты и доказательства отдельных теорем</b> . . . . .	<b>375</b>
<b>Приложение 2. Описание основных элементов языков программирования Паскаль, визуального Бейсика и С++</b> . . . . .	<b>396</b>
Литература . . . . .	414
Предметный указатель . . . . .	416