

У 152
212

64 5/25

ЛОГАРИТМИЧЕСКИ-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ
РУКОВОДСТВО
БАРОНА ГЕОРГА ВЕГА.

Пятдесятътретье изданіе.

обработанное

Дномъ К. БРЕМИКЕРОМЪ.

БЕРЛИНЪ 1870.

ВЪ КНИЖНОМЪ МАГАЗИНЪ ВЕЙДМАННА.

24 7/18

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Всѣ до сихъ поръ изданныя семи-значныя логарифмическія таблицы можно раздѣлить на три категоріи. Первые отдѣлы таблицъ въ каждой категоріи почти одинаковы; они содержатъ логарифмы натуральныхъ чиселъ, такъ что раздѣленіе на три категоріи относится собственно только ко вторымъ отдѣламъ таблицъ, содержащимъ логарифмы тригонометрическихъ линій. Къ таблицамъ первой категоріи мы относимъ тѣ таблицы, въ которыхъ помѣщены логарифмы этихъ линій для части четверти окружности, отъ минуты до минуты, таблицы второй категоріи содержатъ логарифмы для каждаго десяти секундъ, наконецъ третью категорію составляютъ таблицы, содержащія логарифмы тригонометрическихъ величинъ для каждой секунды. Къ первой категоріи принадлежатъ старинныя семи-значныя таблицы, напримѣръ таблицы Шервина¹⁾, содержащія логарифмы чиселъ отъ 1 до 101000 и логарифмы синусовъ, тангенсовъ и секансовъ отъ минуты до минуты. Таблицы эти до конца прошлаго столѣтія были издаваемы нѣсколько разъ, и служили образцомъ для составленія издаваемыхъ до новѣйшаго времени таблицъ, частію съ опущеніемъ натуральныхъ синусовъ и тангенсовъ, вообще рѣдко употребляемыхъ, а частію съ прибавленіями болѣе или менѣе полезными. Гардинеръ, въ 1741 году выпустилъ въ свѣтъ третье изданіе Шервинскихъ таблицъ, дополнивъ ихъ таблицею логарифмовъ тригонометрическихъ линій, въ которой разность угловъ уменьшена до 10", и которая была первая въ этомъ родѣ²⁾. Второе изданіе тѣхъ же таблицъ въ томъ же форматѣ вышло въ Авиньонѣ, съ присовокупленіемъ логарифмовъ синусовъ и тангенсовъ для каждой

1) Лондонъ 1705.

2) Tables of Logarithms; in quarto 1742. Лондонъ. —

секунды первых четырех градусов окружности¹⁾. По Авиньонским таблицам были составлены логариёмы Калета, вышедшие в Париж первым изданием в 1783 году. Впоследствии они вышли стереотипным изданием, и вытиснили удобством своего формата прочія таблицы. Логариёмы эти до сих поръ суть лучшіе изъ всѣхъ. Большая Тейлорова таблица, вышедшая в Лондонъ 1792 года, есть первая изъ таблицъ третьей категоріи. Въ изданныхъ по ней таблицахъ Багая²⁾ форматъ значительно уменьшенъ мелкостью цифръ. Къ таблицамъ первой и второй категоріи можно еще присовокупить во первыхъ семи-значные логариёмы, составленные Гобертомъ и Иделеромъ³⁾, для стоградуснаго дѣленія окружности; въ нихъ разность угловъ равна одной сотой градуса, и во вторыхъ таблицы, изданныя Деламбромъ въ IX году республики⁴⁾, въ которыхъ разность угловъ равна десяти секундамъ новаго дѣленія.

Для пяти-значныхъ таблицъ угловой интервалъ въ одну минуту совершенно достаточенъ, ибо табличныя разности тогда такъ малы, что пропорціональныя ихъ части для секундъ весьма легко вычисляются. Но для таблицъ семи-значныхъ такой интервалъ давно признанъ неудобнымъ, и потому Гардинеръ уже уменьшилъ его до 10", но и это уменьшение еще недостаточно, когда желаемъ сохранить возможное удобство для вычисленія въ умъ пропорціональныхъ частей; для такой цѣли упомянутый интервалъ надо еще уменьшить и на прим. довести до 1". Однакожъ столь малая разность угловъ имѣетъ свои неудобства, которыя до того уменьшаютъ ея преимущества, что тѣ таблицы, гдѣ разность угловъ равна 1", почти никогда не были употребляемы, по крайней мѣрѣ лицами занимающимися вычисленіями постоянно. Большой форматъ этихъ таблицъ, множество столбцовъ, стоящихъ на каждой страницѣ другъ возлѣ друга, и то обстоятельство, что по малости мѣста не всѣ цифры могутъ быть помѣщены рядомъ, а четыре начальные знака каждаго логариёма обыкновенно ставятся надъ столбцомъ, въ которомъ логариёмы находятся, и принадлежатъ всѣмъ логариёмамъ этого столбца, а разности вовсе не помѣщаются, такъ что всегда должно ихъ находить. Всѣ эти неудобства, взятые вмѣстѣ, дѣлаютъ весьма сомнительною выгоду таблицъ, при весьма малой разности угловъ.

1) Tables de Logarithmes. Avignon. 1770.

2) Nouvelles Tables astronomiques et hydrographiques. 1829.

3) Neue trigonometrische Tafeln. Berlin 1799.

4) Tables trigonométriques décimales, calculées par Ch. Borda.

Во всѣхъ изданіяхъ таблицъ Веги интервалъ въ тригонометрической части былъ въ 1'; настоящее же изданіе превосходитъ всѣ прежнія введеніемъ интервала въ 10" для всей четверти окружности, и значительными улучшеніями въ форматъ и расположеніи таблицъ, которыя много облегчаютъ отыскиваніе по нимъ логариёмовъ. Хотя объемъ таблицъ значительно увеличился, но издатель не возвысилъ ихъ цѣву, такъ что его изданіе соединяетъ преимущества большихъ таблицъ т. е. удобство въ употребленіи съ выгодами малыхъ, т. е. незначительностью цѣны.

Главныя улучшенія въ таблицахъ суть слѣдующія:

1) Систематическое расположеніе чиселъ на каждой страницѣ, ведущее къ тому, что, когда найдена нужная страница, то глазъ самъ, при нѣкоторомъ навыкѣ, направляется къ мѣсту требуемаго логариёма, а не ищетъ его на удачу между множествомъ чиселъ цѣлой страницы. Это отыскиваніе на удачу чрезвычайно утомляетъ глазъ при употребленіи таблицъ, а потому, чтобы по возможности облегчить его, здѣсь помѣщены на каждой страницѣ главныя и промежуточныя подраздѣленія, доставляющія глазу нужныя точки опоры. Въ первой части на каждой страницѣ имѣются по 4 такихъ точекъ опоры, а именно съ лѣвой стороны строки соответствующія числамъ 10, 20, 30 и 40, а съ правой стороны строки, соответствующія числамъ 60, 70, 80 и 90 заключены между двумя линіями. Промежуточныя строки, соответствующія числамъ отъ 1 до 9 въ свою очередь отдѣлены по три маленькими промежутками. Во второй части, страницы имѣютъ по 61 строкъ. Вслѣдствіе этого образуются 5 главныхъ отдѣловъ, и такъ какъ 3^a или средній отдѣлъ соответствуетъ какъ снизу, такъ и сверху, числу 30, то онъ отмѣченъ особенными болѣе замѣтными линіями. Промежуточныя подраздѣленія остались тѣ же, которыя были указаны. Наконецъ въ третьей части строки, соответствующія цѣлымъ минутамъ, помѣщены между двойными линіями, каждая 3^a изъ нихъ ограничена линіями болѣе толстыми. Это расположеніе употребленное первоначально въ шести-значныхъ таблицахъ¹⁾, доставляетъ еще и ту выгоду, что, при возвышающихся и понижающихся числахъ, линіи сохраняютъ то же самое положеніе относительно чиселъ, какъ на правой, такъ и на лѣвой сторонѣ страницы, чего нельзя было достигнуть простыми горизонтальными линіями.

2) Цифры; Людми, часто употребляющими логариёмическія та-

1) Logarithmorum VI decimalium nova tabula Berolinensis. Berlin, 1852.

блицы замѣчено, что вошедшія въ последнее время въ моду цифры очень толстыя и одинаковой высоты труднѣе читать, нежели тѣ, которыя употреблялись прежде. Кроме того въ печати болѣе тонкія части этихъ цифръ почти совсѣмъ не выходятъ, такъ что трудно отличить 1 отъ 4, 0 отъ 6, 9 отъ 3 и 5 отъ 8. При томъ толстыя цифры не разборчивы потому еще, что бѣлые промежутки между ними очень малы и цифры сливаются между собою. Употребленіе таблицъ подобнаго рода весьма утомляетъ зрѣніе. По этому при печатаніи новыхъ таблицъ употреблены цифры ближе подходящія къ старымъ, онѣ довольно тонки, и потому занимаютъ мало бѣлаго мѣста на страницѣ; ихъ размѣры достаточно велики, чтобы не утомлять при чтеніи обыкновенный здоровый глазъ, и въ тоже время ихъ части выдаются то вверхъ, то внизъ изъ за строки такъ что каждая цифра имѣетъ весьма характеристическую форму, которую легко отличить отъ другихъ даже въ случаѣ небольшихъ поврежденій, необходимыхъ при долгомъ употребленіи. Особенное вниманіе было обращено на сообразное съ цѣлью распредѣленіе цифръ и линий и послѣ многихъ попытокъ, принимая въ соображеніе всѣ обстоятельства, могущія облегчить употребленіе таблицъ, избрана употребленная здѣсь форма страницы.

3) Часто въ тригонометрической части таблицъ возлѣ градусовъ, минутъ и секундъ помѣщается особый столбецъ, дающій эти дуги въ единицахъ времени; точно также подлѣ каждого числа въ первой части помѣщены градусы, минуты и секунды, получаемые чрезъ превращеніе или этого числа, или числа въ десять разъ большаго, которое принимаютъ выражающимъ секунды, коихъ логарисмы помѣщены на той же страницѣ. Такого рода столбцы у насъ вездѣ пропущены, потому что они приносятъ большую пользу въ мореходныхъ таблицахъ и могутъ только затруднить употребленіе семи-значныхъ таблицъ. Въ замѣнъ этого въ 1^{ой} части, внизу таблицы, дано двойное дугообращеніе, и помѣщены логарисмы $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\lg x}{x}$ отъ 10 до 10", отъ 0 до 2° 46' 40". Эти послѣднія облегчаютъ переходъ отъ lg. дуги къ lg. Sin или lgtg. и въ Геодезін употребляютъ часто.

4) Для облегченія интерполяціи въ первой и третьей части помѣщены таблицы разностей. Мелкій шрифтъ, употребленный для этихъ табличекъ далъ возможность, даже на первыхъ страницахъ, гдѣ разности логарисмовъ быстро измѣняются, помѣстить табличныя разности при каждой ихъ переменѣ. Эти таблички, заключающія въ

себя десятыя доли полныхъ разностей, весьма облегчаютъ приисканіе логарисмовъ съ точностью до послѣдней ихъ цифръ.

5) Особенное вниманіе было обращено на точное опредѣленіе седьмаго десятичнаго знака. Вѣрность логарисма, отыскиваемаго къ данному числу, конечно, зависитъ отъ вѣрности всѣхъ, сохраняемыхъ въ логарисмѣ цифръ. Ограничиваясь 7^ю десятичными знаками, послѣдняя цифра или сохраняетъ свое значеніе, или увеличивается единицею, смотря по тому, будетъ ли откинутая часть мантиссы менѣе или болѣе 5. Это дѣлается для того, чтобы сдѣланная погрѣшность всегда была менѣе половины единицы перваго откинутого разряда. По этому при составленіи таблицъ семи-значныхъ логарисмовъ необходимо было знать величину 8^{ой} цифры. Такъ какъ мы пользовались для составленія нашихъ таблицъ *Thesaurus logarithmorum* ¹⁾ Веги, заключающимъ логарисмы съ 10 знаками, и такъ какъ при перечисленіяхъ десятая цифра оказалась вообще вѣрною, то сомнительна была послѣдняя цифра только тѣхъ логарисмовъ, которые у Веги оканчивались цифрами 500. Чтобы устранить это сомнѣніе, сомнительныя логарисмы были вычислены до 15^{ти} цифръ. И такимъ образомъ опредѣлено истинное значеніе 7^{ой} цифры нашихъ логарисмовъ.

Но гораздо болѣе затрудненій представлялось, при пользованіи тѣмъ же источникомъ, для опредѣленія логарисмовъ тригонометрическихъ линий. *Thesaurus logarithmorum* Веги, составленный по таблицамъ Влакка ²⁾, имѣетъ те же и довольно многочисленныя ошибки. По изслѣдованіи оказалось, что ошибка въ послѣдней цифрѣ доходитъ иногда до 4^{хъ} единицъ; по этому необходимо было проверить всѣ тѣ логарисмы, которыхъ послѣднія цифры были 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503 и 504, ибо, какъ было замѣчено, ошибка на 4 единицы въ десятой цифрѣ, могла въ этихъ случаяхъ имѣть вліяніе на послѣднюю цифру семи-значныхъ логарисмовъ ³⁾. Эти вычисленія сдѣланы были съ помощью Бригговыхъ четырнадцати-значныхъ таблицъ ⁴⁾, которыя были тщательно проверены чрезъ составленіе рядовъ ихъ разностей. При этомъ оказалось, что въ новѣйшихъ, равно какъ и въ прежнихъ изданіяхъ этихъ таблицъ, многіе логарисмы невѣрны. Это очевидно произошло вслѣдствіе излишняго безусловнаго довѣрія къ *Thesaurus logarithmorum*. Для опредѣле-

1) *Thesaurus logarithmorum completus*. Leipzig 1794.

2) *Trigonometria artificialis*. Gouda 1633.

3) Встрѣчаются еще и другія ошибки, которыя нельзя принимать за простыя опечатки. Такъ напр. послѣд. цифра 517 въ lg tg 0° 2' 7" показаны ошибочно. Санусы и котангенсы имѣютъ ту же ошибку.

4) *Trigonometria britannica*, изданная Джелибрандомъ, Gouda 1635.

ніа синусовъ и тангенсовъ дугъ, увеличивающихся отъ секунды до секунды, Thesaurus logarithmorum представляетъ десяти-значные логариемы только до 2° , далѣе же этого предѣла, для дугъ отъ 2° до 5° , надо было придумать другое средство. Интерполяція изъ Trigonometria Britannica, которую мы сначала употребили, оказалась слишкомъ неудобною, потому что она отнимала много времени и требовала вычисленія 6 рядовъ разностей.

Интерполяція между десяти-значными логариемами, для дугъ отъ $10''$ до $10''$ показалась намъ сомнительною, потому что при невѣрности послѣднихъ цифръ становится еще больше въ интерполированномъ логариемѣ. Это заставило насъ отдать преимущество прямому вычисленію логариемовъ, тѣмъ болѣе что при надлежащей внимательности оно гораздо скорѣе и вѣрнѣе ведетъ къ цѣли. Сначала были вычислены логариемы $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\lg x}{x}$ для дугъ отъ 0 до 5° съ интервалами въ $400''$. Такъ какъ строки выражающія эти функціи быстро сходятся, то достаточно было 4^{th} членовъ для вычисленія съ точностью до 14 цифры, а для интерполяціи достаточно было 4^{th} рядовъ разностей. Потомъ чрезъ интерполированіе интервалъ былъ доведенъ до $100''$ и за тѣмъ черезъ дальнѣйшую интерполяцію вычислены были первыя десять цифръ для каждой секунды, къ которымъ за тѣмъ приданы были логариемы дугъ, черезъ что получились логариемы синуса и тангенса съ 10 знаками. Вычисливши за тѣмъ до 13^{th} цифры интерполяціею первоначальной 14^{th} значной таблицъ тѣ логариемы, которые оканчивались цифрами 499, 500 и 501 (ибо въ нихъ происшедшая при вычисленіи ошибка въ $1\frac{1}{2}$ десятыхъ знака могла имѣть вліяніе на седьмую цифру) мы имѣли возможность съ совершенною точностью дать 7 цифръ, каждаго входящаго въ таблицу логариема. Убѣдившись въ ихъ вѣрности для окончательной повѣрки проверены были еще первыя шесть цифръ посредствомъ разностей.

Для полученія возможно-лучшаго безошибочнаго стереотипнаго оттиска было сдѣлано 3 пробныхъ простыхъ оттиска и одинъ по готовымъ уже доскамъ. Первые два пробные оттиска были исправлены посредствомъ сравненія съ рукописью, 3^{ий} же посредствомъ разностей, чтобы въ него не вкрались ошибки, незамѣченныя въ манускриптѣ. Наконецъ послѣдняя десятичная цифра сравнена съ Гардинеромъ, Баббажемъ¹⁾, Каллетомъ²⁾ и отчасти съ Тейлоромъ³⁾.

1) Table of logarithms. London 1826. 2) Tables portatives de logarithmes. Paris 1795. Tirage 1821. 3) Table of Logarithms. London 1792.

Гардинеръ который также опредѣлилъ семи-значные логариемы, сокративъ 10 значные логариемы Влакка, принялся за это дѣло съ большою осторожностью, для полученія вѣрнаго седьмаго знака. Въ своемъ предисловіи онъ говоритъ что послѣдняя цифра логариемовъ Влакка была повѣрена имъ помощью разностей, при чемъ найдено много ошибокъ. Должно полагать, что эта повѣрка сдѣлана съ большимъ вниманіемъ; ибо сравненіе показало только два логариема, коихъ послѣдняя цифра была не вѣрна, а именно $\lg 52943$ и $\lg \cos 24^\circ 55' 30''$, которые въ таблицахъ Гардинера были показаны равными 7238086 и 9.9575404, а въ дѣйствительности должны быть 7238085 4683559 и 9.9575403 4999866. Это стараніе исправить ошибки, простирающееся и на ту часть таблицъ, которая содержитъ логариемы тригонометрическихъ линій для дугъ отъ секунды до секунды, начиная отъ 0 до 72 минутъ, не только не было достаточно оцѣнено со стороны новыхъ издателей логариемическихъ таблицъ, но наконецъ и совсѣмъ забыто. Это подтверждаютъ прибавленія, содержащіяся въ позднѣйшихъ изданіяхъ таблицъ Гардинера; и также видно изъ того, что по напечатаніи Thesaurus logarithmorum, въ которомъ, какъ было уже сказано, большая часть логариемовъ Влакка были только перепечатаны и очень немногіе поправлены, новые издатели таблицъ руководствовались ими, не желая принять на себя труда критики, или обманутые обещаніемъ уплаты одного дуката за всякую найденную ошибку, обещаніемъ, на которое не отважился ни одинъ издатель прежнихъ таблицъ. По этому легко понять, отъ чего въ логариемическихъ таблицахъ многіе издатели дали ошибочные у Влакка находящіеся логариемы, не смотря на то что у Гардинера они даны совершенно вѣрно. Вотъ тому примѣры: 1. $\lg \sin 2^\circ 29' 50''$ котораго точная величина есть 8,6391970 5001389 опредѣленъ Гардинеромъ съ 7^ю цифрами совершенно вѣрно. Но такъ какъ по Влакку и Вегъ 10^{та} значный логариомъ есть 6391970 499, то въ новѣйшихъ таблицахъ, а также у Тейлора поставленъ 0 на мѣстѣ седьмой цифры. — 2. $\lg \lg 5^\circ 7' 40'' = 8,9529682 4994086$. Влаккъ и Вега получили 9529682 501; Гардинеръ ставитъ 7^ю цифру 2; новѣйшія же таблицы, какъ напр. у Тейлора, седьмую цифру 3. — 3. $\log \tan 7^\circ 23' 50''$ равенъ 9,1133684 5003401 сл. 7^я цифра должна быть 5. Но у Влакка и Веги находимъ 1133684 499, почему новѣйшія таблицы и Тейлоръ сохраняютъ 7^ю цифру 4. — 4. $\lg \lg 7^\circ 59' 0''$ равенъ 9,1468849 4989462 сл. 9 должно быть послѣднею цифрою, но Вега и Влаккъ даютъ 1468849 501, а потому новѣйшія таблицы ставятъ на послѣднихъ мѣстахъ 50. — 5. $\lg \sin$