МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДАХ С РАЗРЕЗАМИ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
В.Е. Петрова, С.Н. Медведев,
О.А. Медведева, О.Г. Корольков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Содержание

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ есть однозначная функция комплексной переменной z, определенной в области D. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области D. Тогда для того, чтобы функция $W = f(z)$ была аналитична в области D необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Эти условия показывают, что функции u и v не могут быть выбраны независимо друг от друга, чтобы получить аналитическую функцию $f(z)$. Дифференцируя первое уравнение (1) по x, второе по y и складывая результат, получим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. $\triangle u = 0$. Аналогично можно получить $\triangle v = 0$. Следовательно, функции u и v являются гармоническими в области D. Отметим, что $u = Ref(z)$ и $v = Imf(z)$, поэтому аналитическая функция $f(z)$ является гармонической функцией. Однако, если взять за u и v две произвольные гармонические в области D функции, то $u + iv$ в общем случае не будет аналитической функцией в этой области. Для того, чтобы $u + iv$ была аналитической в области D, надо взять за одну из них произвольную гармоническую функцию, например u, и определить затем v из уравнений Коши – Римана (1).

Понятие голоморфности функции

Функция $f(z)$ есть голоморфная функция в точке a, если она в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд относительно $(z - a)$. Это свойство голоморфности функции в точке a эквивалентно свойству аналитичности в этой же точке. Мы будем пользоваться понятием аналитичности, предполагая разложимость функции в окрестности точки в степенной ряд.

Производную от аналитической функции $f(z)$ можно выразить через её действительную и мнимую части u и v следующим образом:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1.2 Интеграл от комплексной функции

Пусть $W = f(z)$ — произвольная непрерывная функция комплексной переменной z, определенная в области D. Пусть L — простая гладкая кривая, принадлежащая области D и соединяющая точку a и точку b.

Под *гладкой кривой* (или контуром) мы подразумеваем *простую* (т.е. без точек самопересечения) замкнутую или незамкнутую линию с непрерывно меняющейся касательной и не имеющей точек возврата (заострения).

Интеграл от $f(z)$ вдоль кривой L определяется

$$\int_L f(z)dz = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx + udy) = \int_L (u - iv)(dx + idy),$$

т.е. он выражается через два действительных криволинейных интеграла.

Если $z = z(t)$, а кривая L задана параметрически для $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]dt +$$
$$+ i\int_\alpha^\beta [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)]dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Если имеем кусочно-гладкую линию L, состоящую из гладких L_1, L_2,...,L_N, тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + ... + \int_{L_n} f(z)dz.$$

1.3 Теорема Коши

Утверждение. Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D и $L \in D$ — кусочно-гладкая кривая, тогда $\int_L f(z)dz$ не зависит от формы линии

L, а определяется только положением начальной и конечной точек этой линии.

Теорема. Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то для любого замкнутого контура $C \in D$ имеет место следующее равенство

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Формула Коши

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D и непрерывна на её границе L. Тогда для любой точки $\xi \in D$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-\xi}dt. \tag{2}$$

Направление интегрирования по L выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Аналитическая функция $f(z)$ в замкнутой области D полностью определяется, если известны её значения на границе области D, т.е. формула Коши (2) решает краевую задачу для аналитических функций.

Пусть L — некоторый гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости Z. Обозначим через D^+ область внутри контура L, а дополнительную к $D^+ \cup L$, содержащую бесконечно удаленную точку, обозначим D^- и будем называть внешней. Контур $L \notin D^+$ и $L \notin D^-$. За положительное направление обхода контура L принимаем то, при котором область D^+ остается слева.

Если $f(z)$ — функция, аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ \cup L$, то согласно формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^+, \\ 0, z \in D^-. \end{cases} \tag{3}$$

Если $f(z)$ аналитична в области D^- и непрерывна в $D^- \cup L$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^-. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) — это прямое следствие из теоремы Коши, так как в этом случае подынтегральная функция $f(\tau)/(\tau - z)$ $(z \notin D^+)$ аналитична в D^+ и непрерывна в $D^+ \cup L$.

Интеграл, стоящий в левой части формул (3) и (4), называется *интегралом Коши.*

2 Интегралы типа Коши

2.1 Определение и свойства

Пусть теперь L — гладкий замкнутый или незамкнутый контур, целиком расположенный в конечной части плоскости, τ — комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ — непрерывная функция точек контура. Тогда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{5}$$

построенный так же, как и интеграл Коши, называется *интегралом типа Коши.* Функция $\varphi(\tau)$ называется его плотностью, а $1/(\tau - z)$ — ядром.

Свойства

1) $\Phi(z)$ — функция, аналитическая во всей плоскости комплексного переменного за исключением точек самого контура L.

Доказательство аналитичности $\Phi(z)$ заключается в установлении возможности дифференцирования по переменной z (параметру) под знаком интеграла. (Доказать самостоятельно.)

Приведём теорему и доказательство для более общего случая. Из него аналитичность интеграла типа Коши будет вытекать как частный случай.

Теорема. Пусть L — гладкий контур (замкнутый или незамкнутый), $f(\tau, z)$ — функция, непрерывная по переменной $\tau \in L$, аналитическая по z в некоторой области D для всех значений $\tau \in L$ и ограниченная постоянной M при всех $\tau \in L$ и $z \in D$. Тогда функция, представленная криволинейным интегралом

$$F(z) = \int_L f(\tau, z) d\tau,$$

есть аналитическая функция переменной z.

Доказательство. Выберем круг радиуса R с центром в точке z, ограниченный окружностью C, целиком лежащей в D. Тогда, представляя аналитическую по z функцию $f(\tau, z)$ интегралом Коши, интеграл (5) можно записать так:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{t - z} dt.$$

Используя тождество

$$\frac{1}{\triangle z}\left[\frac{1}{t - z - \triangle z} - \frac{1}{t - z}\right] - \frac{1}{(t - z)^2} = \frac{\triangle z}{(t - z)^2 (t - z - \triangle z)},$$

получим равенство

$$J = \frac{F(z + \triangle z) - F(z)}{\triangle z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t) dt}{(t - z)^2} =$$

$$= \frac{\triangle z}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t) dt}{(t - z)^2 (t - z - \triangle z)}.$$

Пусть l — длина кривой L. Легко найдем оценку

$$|J| = \frac{\triangle z}{2\pi} \frac{M}{R^2 (R - |\triangle z|)} 2\pi R l.$$

При достаточно малом $\triangle z$ величину $|J|$ можно сделать меньше любого заданного числа $\varepsilon > 0$. Следовательно, функция $F(z)$ имеет производную, равную

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t - z)^2} dt. \qquad (6)$$

С другой стороны, еще раз используя формулу Коши и дифференцируя ее, будем иметь

$$\frac{\partial f(\tau, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau, t) dt}{(t - z)^2}.$$

Отсюда и из (6) следует