Общая физика

УДК 533.93

Электродинамические свойства невырожденной низкотемпературной плазмы при $\hbar \to 0$

Б. А. Векленко

Представлена электродинамика низкотемпературной плазмы, включающая квантованное продольное электромагнитное поле и содержащая безразмерный квантовый параметр. Таковым является безразмерный заряд, обратно пропорциональный средней квадратичной скорости электронов в плазме и по величине превышающий единицу. Таким образом, ставятся под сомнение результаты численных расчетов, основанных на теории возмущений.

PACS: 52.35.-g

Ключевые слова: низкотемпературная плазма, электродинамика, квантовый параметр, безразмерный заряд.

Введение

Электрон-ионная плазма традиционно считается классической, если при ее описании постоянная Планка из расчетов выпадает. Необходимым условием классичности является малость энергии Ферми электронов по сравнению с температурой [1]. Есть основания полагать, что это условие не является достаточным, во всяком случае, при учете флуктуаций [2]. Электродинамика классической нерелятивистской электрон-ионной плазмы ведет свое начало от работ [3—6] и в отдельных аспектах неплохо согласуется с экспериментальными данными [1]. Квантовая теория плазмы [5, 7, 8] развивалась практически параллельно и ставила целью изучение свойств плазмы в том случае, если электроны подчиняются статистике Ферми—Дирака. При этом всегда предполагалось, что электромагнитное поле, описывающее взаимодействие электронов и ионов, остается классическим [9, 10]. Вопрос о квантовом описании электромагнитного поля не ставился просто потому, что теория при этом сильно усложняется, а опыт, приобретенный, в основном, в лазерной области [11], подсказывал, что учет процедуры квантования поперечного электромагнитного поля оказывает ничтожное влияние на поведение "квантовых средних".

Векленко Борис Александрович, профессор.
Московский энергетический институт (технический университет).
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14.
E-mail: VeklenkoBA@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

Ниже показано, что в случае электрон-ионной плазмы из-за наличия квантованных продольных волн ситуация меняется. Очевидно, что квантование поля в плазме повлечет за собой появление в теории кванта энергии $\hbar\Omega$, где $\Omega = \sqrt{e^2 n / m}$ — ленгмюровская частота колебаний плазмы. Здесь используются общепринятые обозначения, а именно, e — заряд электрона, m — его масса, n — концентрация электронов в плазме. Чтобы исключить из теории квант энергии $\hbar\Omega$, необходимо предположить, что классическая энергия взаимодействия частиц значительно превосходит эту величину, т. е.

$$\frac{e^2}{4\pi} n^{\frac{1}{3}} >> \hbar\Omega.$$

Но этого недостаточно. Это неравенство обеспечивает превосходство над $\hbar\Omega$ энергии взаимодействия частиц "в среднем". В плазме частицы взаимодействуют друг с другом вплоть до расстояний, определяемых дебаевским радиусом экранирования $r_D = v_e / \Omega$ (v_e – средняя квадратичная скорость электронов). Но поскольку $r_D >> n^{-\frac{1}{3}}$, то имеется много частиц, расстояния между которыми лежат в интервале $n^{-\frac{1}{3}} \div r_D$. Для этих частиц квантовые эффекты могут оказаться существенными. Чтобы исключить квантовые эффекты полностью, следует предположить, что

$$\frac{e^2}{4\pi r_D} >> \hbar\Omega.$$

Или, что то же самое

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar v_e} >> 1. \qquad (1)$$

В стандартной невырожденной низкотемпературной плазме при температуре ~ 10^4 K эта величина порядка десяти, и неравенство (1) заведомо выполняется. Но настораживает появление в теории безразмерного заряда, величина которого превышает единицу. Последнее обстоятельство исключает возможность использования теории возмущений. Если учесть, что сам вывод неравенства (1), по существу, основан на теории возмущений, то можно сделать вывод о противоречивости существующей классической теории плазмы из-за наличия большого квантового параметра $e^2/4\pi\hbar v_e$. К тому же неравенство (1) накладывает ограничение снизу на величину заряда. Это означает, что классическое описание почти идеальной плазмы ($e \to 0$) с нарушением неравенства (1) не может служить основанием для дальнейших приближений. В теории можно ожидать появления немалых неаналитических по $\hbar$ квантовых поправок. Цель работы — прояснить возникшую ситуацию.

Базовые уравнения

Будем исходить из квантового описания плазмы, представляя поле электронов гейзенберговским полевым оператором $\check{\psi}(\mathbf{r},t)$, заданным в каждой точке пространства $\mathbf{r}$ в любой момент времени t. Поле ионов рассматривать не будем, считая ионы равномерно распределенными по пространству. Электромагнитному полю, осуществляющему взаимодействие между частицами, сопоставим полевой векторный оператор $\check{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)$. Систему уравнений для полевых операторов пишем в виде стандартных уравнений нерелятивистской квантовой электродинамики:

$$i\hbar\frac{\partial\check{\psi}(x)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\check{A}^{\nu}(x)\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} - \frac{e}{2mc}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\check{A}^{\nu}(x) + \frac{e^2}{2mc^2}\check{A}^{\nu}(x)\check{A}^{\nu}(x)\right)\check{\psi}(x),$$

$$x = \{\mathbf{r},t\}; \qquad (2)$$

$$\nabla^2\check{A}^{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\check{A}^{\nu_1}(x) - \mu^2\check{A}^{\nu}(x) = -\frac{1}{c}\check{j}^{\nu}(x); \quad (3)$$

$$\check{j}^{\nu}(x) = \frac{e}{2m}\times \left(\check{\psi}^{+}(x)\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\check{\psi}(x) + \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu *}\check{\psi}^{+}(x)\check{\psi}(x)\right) - \frac{e^2}{mc}\check{\psi}^{+}(x)\check{A}^{\nu}(x)\check{\psi}(x) + j_{cl}^{\nu}(x),$$

$$\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}^{\nu}.$$

По повторяющимся индексам здесь и ниже подразумевается суммирование, через $j_{cl}^{\nu}(x)$ обозначена плотность классического тока, если он присутствует в системе. Использована калибровка с нулевым скалярным потенциалом [12], метод непротиворечивого использования которой в квантовой электродинамике изложен в [13]. В конце расчетов следует положить $\mu \to 0$. Ограничиваясь линейными по электромагнитному полю процессами, опустим в (2) последнее квадратичное слагаемое. Пренебрежем некоммутативностью операторов $\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}$ и $\check{A}^{\nu}(x)$, что вполне допустимо, если в почти равновесной плазме температура T удовлетворяет условию $T >> \hbar\Omega$. В уравнении (2) пренебрежем слагаемым, содержащим квадрат векторного потенциала. Отсутствие этого слагаемого не скажется на качественных выводах настоящей работы. В невырожденной плазме конкретный вид перестановочных соотношений для операторов $\check{\psi}(x)$ не имеет значения. Поэтому будем считать для простоты, что

$$\left[\check{\psi}(x);\check{\psi}^{+}(x')\right]_{t=t'} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$\left[\check{A}^{\nu}(x);\frac{\partial}{\partial x'}\check{A}^{\nu'}(x')\right]_{t=t'} = i\hbar c^2\delta_{\nu\nu'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Для исследования системы воспользуемся методом квантовых функций Грина в формализме Л. В. Келдыша [14]. Согласно определению вводятся четыре функции Грина:

$$G_{ll'}(x,x') = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \hat{T}\,\check{\psi}_l(x)\check{\psi}_{l'}^{+}(x')\right\rangle; \qquad (4)$$

$$D_{ll'}^{\nu\nu'}(x,x') = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \hat{T}\,\check{A}_l^{\nu}(x)\check{A}_{l'}^{\nu'}(x')\right\rangle - \frac{1}{i\hbar}\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle\left\langle \check{A}_{l'}^{\nu'}(x')\right\rangle. \quad (5)$$

Усреднение в формулах (4), (5) осуществляется как в квантовом смысле, так и по ансамблю тождественных систем. В теории рассматриваются две временные линии-стрелы. При этом, времена $-\infty < t < \infty$ на линии $l = 2$ считаются хронологически старше времен $-\infty < t < \infty$, заданных на линии $l = 1$. Хронологический оператор $\hat{T}$ выстраивает произведение полевых операторов в хронологическом порядке, согласованном с принятым определением. Полевые операторы (4), (5) в согласии с (2), (3) удовлетворяют следующим уравнениям Дайсона—Келдыша

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_{ll'}(x,x') = \sigma^{(3)}_{ll'}\delta(x,x') + \frac{1}{2m}\hat{p}_{\mathbf{r}}^2 G_{ll'}(x,x') - \frac{e}{mc}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle G_{ll'}(x,x') - \sum_{l_1}\int M_{ll_1}(x,x_1)G_{l_1l'}(x_1,x')dx_1; \tag{6}$$

$$\nabla^2\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\left\langle \check{A}_l^{\nu_1}(x)\right\rangle - \mu^2\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle - \sum_{l_1}\int \check{D}_{ll_1}^{\nu\nu_1}(x,x_1)\left\langle \check{A}_{l_1}^{\nu_1}(x_1)\right\rangle dx_1 - \frac{e^2 n}{mc^2}\left\langle \check{A}_l^{\nu}(x)\right\rangle = -\frac{1}{c}j_{cl}^{\nu}(x); \tag{7}$$

$$\nabla^2 D_{ll'}(x,x') - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}D_{ll'}^{\nu_1\nu'}(x,x') - \mu^2 D_{ll'}^{\nu\nu'}(x,x') - \sum_{l_1}\int \check{D}_{ll_1}^{\nu\nu_1}(x,x_1)D_{l_1l'}^{\nu_1\nu'}(x_1,x')dx_1 - \frac{e^2 n}{mc^2}D_{ll'}^{\nu\nu'}(x,x') = \sigma^{(3)}_{ll'}\delta(x,x'), \tag{8}$$

где $dx = d\mathbf{r}dt$, $\sigma^{(3)}_{ll'}$ — матрица Паули.

При выводе уравнений (7) и (8) была использована аппроксимация

$$\frac{e^2}{2mc}\left\langle \check{\psi}^{+}\check{A}^{\nu}\check{\psi}\right\rangle \approx \frac{e^2 n}{2mc}\left\langle \check{A}^{\nu}\right\rangle.$$

Таким образом, решение системы (6)—(8) оказывается точным вплоть до членов $\sim e^2$.

Для массового $M_{ll_1}(x,x_1)$ и поляризационного $\Pi_{ll_1}^{\nu\nu'}(x,x')$ операторов в однопетлевом приближении с "обросшими" функциями Грина, которым и ограничимся, возникают следующие выражения [15]:

$$M_{ll_1}(x,x_1) = i\hbar\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}G_{ll_1}(x,x_1)\hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu'}D_{l_1l}^{\nu'\nu}(x_1,x)\sigma^{(3)}_{l_1l_1}; \tag{9}$$

$$\Pi_{ll_1}^{\nu\nu_1}(x,x_1) = i\hbar\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}G_{ll_1}(x,x_1)\hat{p}_{\mathbf{r}_1}^{\nu_1}G_{l_1l}(x_1,x)\sigma^{(3)}_{l_1l_1}. \tag{10}$$

Если взаимодействия в системе отсутствуют ($e \to 0$), то согласно (2), (3)

$$\check{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}\exp\left(i\frac{\mathbf{pr}}{\hbar} - i\frac{\varepsilon_p}{\hbar}t\right),$$

$$\check{\psi}^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}\exp\left(-i\frac{\mathbf{pr}}{\hbar} + i\frac{\varepsilon_p}{\hbar}t\right), \quad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m},$$

$$\check{A}^{\nu}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega(\lambda)}}e_{\mathbf{k}\lambda}^{\nu}\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{kr}-i\omega(\lambda)t} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^{+}e^{-i\mathbf{kr}+i\omega(\lambda)t}\right),$$

где $\mathbf{p}$ — импульс электрона, а значения

$$\omega(\lambda) = \begin{cases}\sqrt{k^2c^2 + \mu^2}, & \lambda = 1,2\\ \mu, & \lambda = 3\end{cases}$$

определены в соответствии с [13]. Далее, $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^{+}$ являются операторами уничтожения и рождения фотонов в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и индексом поляризации λ. При этом индексы $\lambda = 1, 2$ относятся к волнам с поперечной поляризацией, индекс $\lambda = 3$ — к волнам с продольной поляризацией. Операторы $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ описывают уничтожение и рождение электрона в состоянии с вектором $\mathbf{p}$. Алгебраическое преобразование уравнений (6) и (8) показывает [14], что

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_r(x,x') - \frac{1}{2m}\hat{p}_{\mathbf{r}}^2 G_r(x,x') + \frac{e}{mc}\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle G_r(x,x') + \int M_r(x,x_1)G_r(x_1,x')dx_1 = \delta(x,x'); \tag{11}$$

$$\nabla^2\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle - \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\left\langle \check{A}^{\nu_1}(x)\right\rangle - \int \check{D}_r^{\nu\nu_1}(x,x_1)\left\langle \check{A}^{\nu_1}(x_1)\right\rangle dx_1 - \frac{e^2 n}{mc^2}\left\langle \check{A}^{\nu}(x)\right\rangle = -\frac{1}{c}j_{cl}^{\nu}(x);$$