

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистан
Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека

Г. Худайберганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов

АНАЛИЗ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Монография

Красноярск
СФУ
2017

УДК 512.643.4
ББК 22.161+22.143
Х98

Р е ц е н з е н т ы:

Н. Тарханов, доктор физико-математических наук, профессор Потсдамского университета (Потсдам)

А.А. Джалилов, доктор физико-математических наук, профессор Туринского политехнического университета (Ташкент)

Худайбергганов, Г.

Х98 Анализ в матричных областях : монография / Г. Худайбергганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов ; науч. ред. Е. К. Лейнартас. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2017. – 296 с.
ISBN 978-5-7638-3550-2

Монография посвящена комплексному и гармоническому анализу в матричных областях многомерного комплексного пространства. Рассмотрены интегральные представления для голоморфных функций, вопросы голоморфного продолжения, построения локального вычета и др.

Предназначена для специалистов по многомерному комплексному анализу.

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 512.643.4
ББК 22.161+22.143

ISBN 978-5-7638-3550-2

© Сибирский федеральный
университет, 2017
© Национальный университет
Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
Г л а в а 1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ МАТРИЦ	8
1. Некоторые матричные области в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$	8
1.1. Матричный единичный круг	8
1.2. Матричная верхняя полуплоскость	9
1.3. Матричный единичный поликруг.....	10
1.4. Матричный шар	10
1.5. Матричная область Зигеля второго рода	11
1.6. Матричная область Рейнхарта	12
2. Степенные ряды от матриц	14
2.1. Матричная норма	14
2.2. Степенные ряды в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	15
2.3. Формула Коши – Адамара	19
2.4. Области сходимости степенных рядов	20
2.5. Степенные ряды в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	20
2.6. Критерий абсолютной сходимости	21
2.7. Логарифмически выпуклая оболочка области в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	23
2.8. Теорема Гартогса.....	25
3. Голоморфные функции и области голоморфности в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	26
3.1. Определения.....	26
3.2. Связь между голоморфными функциями от nm^2 переменных и голоморфными функциями от нескольких матриц	28
3.3. Области сходимости как области голоморфности.....	30
3.4. Кратная интегральная формула Бохнера – Хуа Локена	31
3.5. Доказательство основного результата главы 1	34
Г л а в а 2. МНОГОМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА	38
4. Многомерные граничные теоремы Морера в поликруге и шаре	38
4.1. Известные результаты.....	38
4.2. Граничная теорема Морера для поликруга.....	41
4.3. Граничная теорема Морера для шара.....	44

5. Условия существования аналитического продолжения функций в классических областях.....	48
5.1. Классические области.....	48
5.2. Условия существования продолжения.....	50
5.3. Граничные теоремы Морера для классических областей.....	57
6. Многомерные граничные теоремы Морера для неограниченной реализации поликруга и шара.....	60
6.1. Граничная теорема Морера для неограниченной реализации поликруга.....	60
6.2. Граничная теорема Морера для неограниченной реализации шара.....	66
 Г л а в а 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ.....	
7. Интегральные представления.....	78
7.1. Автоморфизмы матричного шара.....	79
7.1.1. Объем матричного шара в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$	87
7.1.2. Автоморфизмы матричных шаров второго и третьего типов.....	89
7.2. Интегральная формула Бергмана для матричного шара.....	97
7.3. Ядра Коши – Сеге и Пуассона для матричного шара.....	100
7.4. Интегральные формулы для матричного шара второго типа.....	108
7.5. Ядра Бергмана и Коши – Сеге для матричного шара третьего типа.....	115
7.6. Интегральные формулы в областях Зигеля.....	121
7.7. Формула Бергмана для неограниченной матричной области.....	130
8. Формулы Карлемана.....	135
8.1. Формула Карлемана для функций от матриц.....	135
8.2. Формулы Карлемана в классических областях.....	137
8.3. Формула Карлемана в матричном шаре.....	143
8.4. Граничная теорема Морера для матричного шара.....	147
 Г л а в а 4. МНОГОМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ.....	
9. Граничная теорема Морера для матричной верхней полуплоскости...	152
10. Теорема Морера в неограниченной реализации матричного шара.....	159
10.1. О неограниченной реализации матричного шара.....	159
10.2. Об интегральных представлениях в области Зигеля D	163
10.2.1. Об интегральных формулах в пространстве прямоугольных матриц.....	167
10.2.2. Интегральные формулы.....	169
10.3. Граничная теорема Морера для области Зигеля \mathfrak{D}	173
10.3.1. Ортонормальная система в матричном шаре.....	181

10.3.2. Инвариантный оператор Лапласа – Хуа Локена в матричном шаре.....	186
Г л а в а 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ	194
11. Критерии существования голоморфного продолжения непрерывной функции, заданной на части границы области в \mathbb{C}^n	194
12. О возможности голоморфного продолжения в матричную область функций, заданных на куске ее границы Шилова	200
13. О возможности голоморфного продолжения в шар Ли функций, заданных на части сферы Ли.....	207
14. Условия голоморфной продолжимости в трубчатую область функций, заданных на остоле трубчатой области	216
15. Интерполяционные последовательности в классических областях ...	221
Г л а в а 6. ТЕОРИЯ ЛОКАЛЬНОГО ВЫЧЕТА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ.....	236
16. Интегральные представления локального вычета для голоморфных функций от матриц	237
17. Свойства локального вычета.....	242
18. Представление локального вычета через след и распространение формулы Бишоп на функции от матриц	245
19. Формула Вейля и принцип Руше в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	249
20. Обобщенная интегральная реализация локального вычета.....	253
20.1. Общий рецепт интегральной реализации локального вычета Гротендика	254
20.2. Примеры преобразования локального вычета Гротендика при композициях отображений	256
Г л а в а 7. РАСШИРЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ ТРУБА И КРУГ.....	260
21. Труба будущего	260
21.1. Определения.....	260
21.2. Касательное пространство. Форма Леви.....	261
21.3. Групповая структура. Автоморфизмы	263
22. Труба будущего как классическая область.....	263
22.1. Реализация трубы будущего в виде матричного единичного круга.....	263
22.2. Геометрия матричного единичного круга	265
22.3. Реализация трубы будущего в виде шара Ли	267
23. Расширенный матричный круг. Определения и гипотезы.....	270

24. Критерий голоморфной выпуклости для областей в \mathbb{C}^n , инвариантных относительно действия компактных групп Ли.....	272
24.1. Факторы относительно действия групп.....	272
24.2. Теорема Гильберта.....	273
24.3. Орбитальная выпуклость.....	274
24.4. Эквивариантная теорема продолжения.....	274
24.5. Критерий голоморфной выпуклости.....	275
25. Доказательство гипотезы о расширенном матричном круге.....	276
25.1. Насыщенные орбитально псевдовыпуклые области.....	276
25.2. Орбитально выпуклые области.....	277
25.3. Расширенный матричный круг является орбитально выпуклым.....	278
25.4. Расширенный матричный круг является насыщенным.....	279
25.5. Основной результат.....	279
26. Гипотеза о расширенной матричной трубе.....	280
26.1. Частные случаи.....	280
26.2. Матричная формулировка гипотезы о расширенной трубе будущего.....	281
26.3. Схема доказательства гипотезы о расширенной матричной полуплоскости.....	283
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	285