

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Звягин

**О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ
РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ**

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Оглавление

Предисловие	4
Введение	6
Глава 1. Существование слабых решений эволюционной математической модели	16
1.1. Постановка задачи	16
1.2. Аппроксимационная задача	19
1.3. Априорная оценка	27
1.4. Существование решений аппроксимационной задачи	35
1.5. Доказательство теоремы 1.1.1	36
Глава 2. Задача оптимального управления для эволюционной математической модели	44
2.1. Постановка задачи	44
2.2. Аппроксимационная задача	46
2.3. Априорная оценка	48
2.4. Существование решений аппроксимационной задачи	49
2.5. Доказательство теорем 2.1.1 и 2.1.2	50
Глава 3. Аттракторы для математической модели	55
3.1. Постановка задачи	55
3.2. Аппроксимационная задача	60
3.3. Априорные оценки	69
3.4. Существование решений	74
3.5. Доказательство теорем 3.1.6 и 3.1.7	86
Список литературы	89

Введение

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, с границей Γ . Назовем Ω областью класса C^2 , если граница Γ является C^2 -подмногообразием. Это значит, что для каждой точки границы найдутся окрестность U и евклидова система координат O', y_1, y_2, \dots, y_n такие, что $\Gamma \cap U$ допускает представление в виде поверхности $y_n = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, где φ —функция класса C^2 . Аналогично назовем область Ω локально-липшицевой, если функции φ липшицевы. Примерами локально-липшицевых областей могут служить круг, плоское круговое кольцо.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ — ограниченный сосуд с границей $\Gamma = \partial\Omega$, целиком заполненный некоторой средой, которую в дальнейшем будем называть жидкостью. Жидкость будем представлять как совокупность материальных частиц, заполняющих сосуд Ω , причём эти частицы будем считать настолько малыми, что их можно отождествлять с точками объёма Ω .

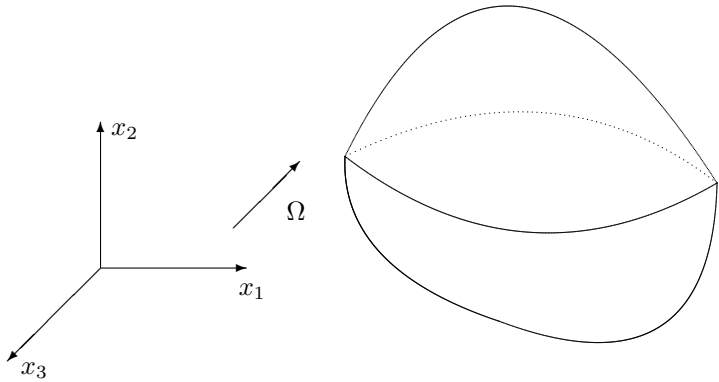


Рис. 1

Стоит заметить, что в гидродинамике жидкость рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Поэтому, когда говорится о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка (см. [13]).

Под движением жидкости мы будем понимать движение материальных точек объема Ω . Таким образом, описать путь, который проходит каждая точка объема Ω за время $t_0 \leq t \leq T$, это и означает описать движение жидкости за это время. Пусть в трёхмерном пространстве зафиксирована ортогональная система координат и e_1, e_2, e_3 — векторы соответствующего базиса. Сосуд с жидкостью Ω будем рассматривать как область в трёхмерном пространстве, а положение движущейся точки объема Ω (или, что то же, частицы жидкости) можно описать с помощью вектор-функции

$$x(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3.$$

Если в начальный момент времени t_0 частица жидкости занимала положение x_0 , а её движение описывается с помощью закона $x(t)$, то $x(t_0) = x_0$.

Каждой частице объема Ω соответствует своя вектор-функция $x(t)$, описывающая её движение. Таким образом, движение жидкости будет описано, если будут найдены все эти вектор-функции $x(t)$. Зафиксируем момент времени t . В этот момент времени частица жидкости, двигающаяся по закону $x(t)$, имеет скорость

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t)e_1 + \dot{x}_2(t)e_2 + \dot{x}_3(t)e_3.$$

Обозначим через $v(t, x)$ — скорость частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x . Тогда

$$\dot{x}(t) = v(t, x(t)).$$

Отсюда следует, что если известны скорость движущейся жидкости в каждой точке $x \in \Omega$ в каждый момент времени t , то есть известна

вектор-функция $v(t, x)$, определённая для всех $x \in \Omega$ и $t \in [t_0, T]$, то, для того чтобы найти вектор-функцию $x(t)$, описывающую движение частицы жидкости, занимающей в начальный момент t_0 положение x_0 , надо решить следующую задачу Коши для векторного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v(t, x(t)), & t_0 \leq t \leq T, x \in \bar{\Omega}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Таким образом, для того, чтобы описать движение жидкости, достаточно знать распределение скоростей жидкости в каждой точке $x \in \Omega$ в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ или, что то же самое, знать вектор-функцию $v(t, x)$.

Рассмотрим силы, действующие на каждую частицу жидкости.

1) **Сила инерции** представляет собой произведение массы на ускорение. Ускорение $\frac{dv}{dt}$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Изменение dv скорости данной частицы жидкости в течение времени dt складывается из двух частей: изменения скорости в данной точке пространства в течение времени dt и из разности скоростей в двух точках, разделенных расстоянием dx , пройденным рассматриваемой частицей жидкости в течение времени dt . Первая часть это $\frac{\partial v}{\partial t} dt$, а вторая $dx_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 dx_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Тогда $dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^3 dx_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$ или же $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Такая производная называется *субстанциональной производной*.

Далее рассмотрим некоторый объем V пространства. Масса жидкости в этом объеме это $\int_V \rho dV$, где $\rho(t, x)$ — плотность жидкости, а интегрирование производится по объему V . Если рассматривать единицу объема, то можно сказать, что она имеет массу ρ . Таким образом, силу инерции выбранной частицы жидкости можно представить в виде