

О. А. Олейник

# ЛЕКЦИИ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

6-е издание, электронное



---

Москва  
Лаборатория знаний  
2020

УДК 517  
ББК 22.161.1  
О53

*Печатается  
по решению Ученого совета  
Московского государственного университета  
имени М. В. Ломоносова*

**Олейник О. А.**

О53 Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 260 с. : ил. — (Классический университетский учебник). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-703-5

В книге излагаются основные факты, относящиеся к уравнению Лапласа, уравнению теплопроводности и волновому уравнению как простейшим представителям трех основных классов уравнений с частными производными. Приводятся доказательства теоремы Ковалевской, смешанная задача для уравнения колебаний неоднородной струны, задача Коши для волнового уравнения и теория симметрических гиперболических систем. Первая глава содержит изложение некоторых сведений из анализа и теории обобщенных функций.

Для студентов университетов и других вузов, изучающих уравнения с частными производными.

**УДК 517  
ББК 22.161.1**

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. — 3-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 260 с. : ил. — (Классический университетский учебник). — ISBN 978-5-94774-623-5.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

ISBN 978-5-00101-703-5

© Лаборатория знаний, 2015  
© МГУ им. М. В. Ломоносова,  
художественное оформление, 2003

# Оглавление

Предисловие ко второму изданию .....	9
Из предисловия к первому изданию .....	10
Глава 1. <b>Вспомогательные предложения</b> .....	11
1.1. Обозначения. Некоторые предложения из анализа .....	11
1.1.1. Неравенство Гёльдера .....	14
1.1.2. Неравенство Фридрихса .....	16
1.1.3. Оценка производной неотрицательной функции .....	16
1.2. Средние функции. Обобщенные производные .....	17
1.3. Основные понятия и теоремы теории обобщенных функций ..	24
1.3.1. Пространство обобщенных функций $D'(\Omega)$ .....	24
1.3.2. Прямое произведение обобщенных функций .....	27
1.3.3. Свертка обобщенных функций .....	30
1.3.4. Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}_x^n)$ .....	34
1.3.5. Обобщенные решения дифференциальных уравнений ..	41
1.3.6. Пространство $H^k(\Omega)$ .....	41
Глава 2. <b>Классификация уравнений с частными производными</b> ...	43
2.1. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям с частными производными .....	43
2.2. Задача Коши. Характеристики. Классификация уравнений ...	52
Глава 3. <b>Уравнение Лапласа</b> .....	67
3.1. Гармонические функции. Уравнение Пуассона. Формулы Грина .....	67
3.2. Фундаментальное решение .....	70
3.3. Представление решений с помощью потенциалов .....	72
3.4. Основные краевые задачи .....	74
3.5. Теоремы о среднем арифметическом. Принцип максимума ...	76
3.6. Функция Грина. Решение задачи Дирихле для шара .....	82
3.7. Единственность и непрерывная зависимость решений краевых задач от граничных условий .....	89
3.8. Априорные оценки производных. Аналитичность .....	96
3.9. Теоремы Лиувилля и Фрагмена—Линделёфа .....	102
3.10. Изолированные особенности гармонических функций. Поведение в окрестности бесконечности. Задача Дирихле в неограниченной области .....	111
3.11. О последовательностях гармонических функций. Обобщенное решение уравнения Лапласа. Лемма Вейля .....	119
3.12. Ньютонов потенциал. Гипоэллиптичность оператора Лапласа	126
3.13. Обобщенные решения задачи Дирихле .....	131
3.13.1. След функций из $\dot{H}^1(\Omega)$ .....	133
3.13.2. Задача Дирихле с однородными граничными условиями	136
3.13.3. Вариационный метод .....	139

3.1.3.4. Задача Дирихле с неоднородными граничными условиями .....	143
Глава 4. <b>Уравнение теплопроводности</b> .....	147
4.1. Формулы Грина. Фундаментальное решение. ....	147
4.2. Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений .....	154
4.3. Постановки краевых задач и задачи Коши .....	156
4.4. Принцип максимума в ограниченной и неограниченной областях .....	158
4.5. Априорные оценки решений краевых задач и задачи Коши. Теоремы единственности. Стабилизация решений .....	165
4.6. Оценки производных. Аналитичность решений по переменным $x$ . Приложения .....	170
4.7. Теорема Лиувилля. Теоремы об устранимой особенности. Компактность семейства решений .....	177
4.8. Решение задачи Коши с помощью преобразования Фурье. Гладкость объемных тепловых потенциалов .....	186
4.9. Обобщенные решения. Гипоэллиптичность оператора теплопроводности .....	194
Глава 5. <b>Гиперболические уравнения и системы</b> .....	199
5.1. Волновое уравнение .....	199
5.1.1. Задача Коши. Энергетическое неравенство .....	199
5.1.2. Решение задачи Коши в случае $n = 3$ . Формула Кирхгофа .....	203
5.1.3. Метод спуска. Решение задачи Коши в случае $n = 2$ . Формула Пуассона .....	206
5.1.4. Формула Даламбера для уравнения струны .....	207
5.1.5. Качественное исследование формул Кирхгофа, Пуассона, Даламбера. Распространение волн в пространствах разной размерности .....	209
5.1.6. Неоднородное уравнение. Принцип Дюамеля .....	213
5.2. Смешанная задача для уравнения колебаний струны .....	215
5.3. Задача Коши для гиперболических систем уравнений с частными производными .....	229
5.4. Теорема Коши .....	229
5.5. Теорема Ковалевской и ее обобщения .....	233
5.5.1. Доказательство теоремы Ковалевской. ....	234
5.5.2. Некоторые обобщения .....	236
5.5.3. Пример несуществования аналитического решения. ....	238
5.6. Симметризуемые системы. Условие Годунова .....	239
5.7. Решение задачи Коши для симметричной системы .....	241
5.7.1. Теорема единственности .....	242
5.7.2. Теоремы вложения .....	246
5.7.3. Априорная оценка .....	248
5.7.4. Существование решения задачи Коши системы с постоянными коэффициентами .....	249
5.7.5. Принцип Дюамеля .....	254
5.8. Обобщенное решение задачи Коши .....	255
Литература .....	259