

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. Д. Кургалин, Т. А. Чураков

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

Введение	4
1. Матрицы и определители	5
2. Системы линейных уравнений	19
3. Линейные векторные пространства	26
4. Фундаментальные решения однородной системы уравнений	35
5. Векторы в трехмерном пространстве	42
6. Уравнение прямой на плоскости	51
7. Уравнение плоскости в пространстве	60
8. Уравнение прямой в пространстве	67
Литература	74

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Если в диагональной матрице все $d_i = 1$, то матрицу называют *единичной* и обозначают I , а если все элементы $d_i = 0$, то называют *нулевой* и обозначают O .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}$ называется *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (т. е. все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю). Аналогично матрица $B = \{b_{ij}\}$ называется *нижней треугольной*, если $b_{ij} = 0$ при $i < j$ (т. е. все элементы выше главной диагонали равны 0).

Для верхней и нижней треугольных матриц специально используются условные обозначения (рис. 1).

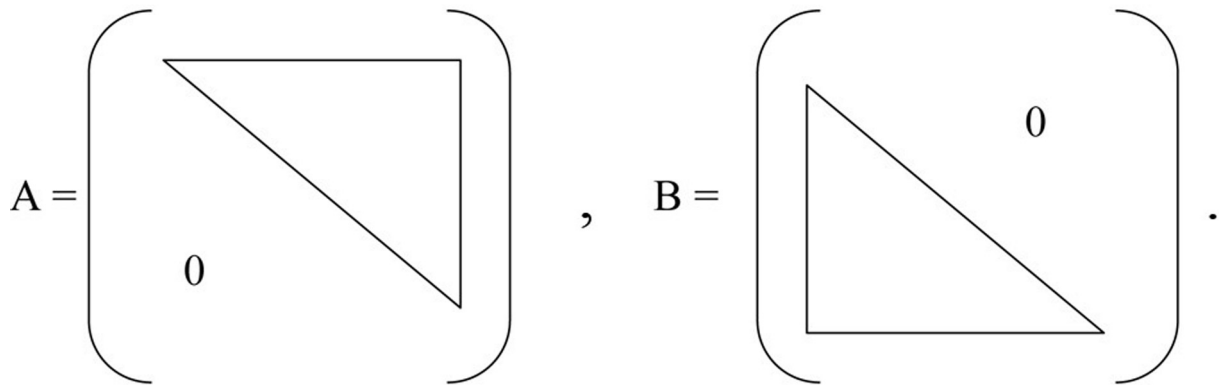


Рис.1. Условные обозначения для верхней A и нижней B треугольных матриц

Матрица $A = \{a_{ij}\}$ называется *симметричной*, если элементы $a_{ij} = a_{ji}$ (т. е. все элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой).

Условие симметричности матрицы можно записать в виде равенства $A = A^T$.

Рассмотрим операции над матрицами.

Суммой (разностью) двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера называют матрицу $C = \{c_{ij}\}$ того же размера, состоящую из элементов $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (или $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$). При этом $C = A + B$ - для суммы матриц или $C = A - B$ - для разности.

Пример. Пусть даны две матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем их сумму $A + B$ и разность $A - B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+5 & -1+3 \\ 1+2 & 3+1 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведением αA действительного числа α и матрицы $A = \{a_{ij}\}$ называют матрицу $C = \{c_{ij}\}$ состоящую из элементов $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Пример.

Пусть $\alpha = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Введённые операции обладают следующими свойствами:

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3) $I \cdot A = A$
- 4) $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A)$
- 5) $\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Произведением матрицы $A = \{a_{ij}\}$ размера $m \times n$ и матрицы $B = \{b_{ij}\}$ размера $n \times p$ называют матрицу $C = \{c_{ij}\}$ размера $m \times p$, элементы которой выражаются как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Кратко это произведение матриц записывается так: $C = A \cdot B$.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

в то же время

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Есть общее правило : матрицы можно перемножать только в том случае, когда число столбцов первого сомножителя - матрицы A равно числу строк второго сомножителя - матрицы B . Кроме того, умножение матриц *некоммутативно*, т. е. при перестановке сомножителей результат может измениться.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $3A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти $B^T \cdot A^T$ и $(A \cdot B)^T$.

3. Вычислить:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$$

1.2. Определители второго и третьего порядка

Матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ размера 2×2 можно поставить в соответствие число

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

которое называется определителем второго порядка матрицы A и обозначается

$$\Delta \equiv \det A \equiv |A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, то $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 13$.

Определителем третьего порядка матрицы A размером 3×3 называется число, полученное по формуле: