Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Прикладная математика и информатика,
Прикладная информатика (в экономике),
Информационные технологии

Ярославль 2009

УДК 519.2
ББК В 171я73-4 + В 172я73-4
Т 11

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра дискретного анализа ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Составители: Ю.В. Богомолов, А.Н. Максименко,
А.Н. Морозов

Т 11 **Теория вероятностей и математическая статистика:** сборник задач / сост. Ю.В. Богомолов, А.Н. Максименко, А.Н. Морозов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2009. — 111 с.

Сборник содержит более 400 задач по темам «Случайные события» и «Случайные величины». На все вычислительные задачи даны ответы. Кроме того, сборник снабжен приложениями, содержащими справочный материал: таблицы значений функции плотности нормального распределения и функции Лапласа.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 010501 прикладная математика и информатика, 080801 прикладная информатика (в экономике) и 010400 информационные технологии, очной формы обучения (дисциплина «Теория вероятностей», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В 171я73-4 + В 172я73-4

Учебное издание

Теория вероятностей
и математическая статистика

Сборник задач

Составители: **Богомолов** Юрий Викторович
Максименко Александр Николаевич
Морозов Анатолий Николаевич

Редактор, корректор И.В. Бунакова
Компьютерная верстка А.Н. Максименко

Подписано в печать 23.04.2009. Формат 60x84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 4,7.
Тираж 200 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3680	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4230	4251	4265	4279	4292	4305	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986

$\Phi(3,0) = 0,49865;$ $\Phi(3,2) = 0,49931;$ $\Phi(3,4) = 0,49966;$
$\Phi(3,6) = 0,499841;$ $\Phi(3,8) = 0,499928;$ $\Phi(4,0) = 0,499968;$
$\Phi(4,5) = 0,499997;$ $\Phi(5,0) = 0,49999997.$

Содержание

1 Случайные события

1.1 Основные понятия. Классическое определение вероятности

Событие называется *случайным*, если в данном опыте оно может произойти или не произойти. Случайные события обозначаем $A, B, C, \ldots$

Под *вероятностью события* понимается степень (мера) нашей уверенности в его наступлении, основанная на объективной оценке доли случаев его появления. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Достоверным называется событие Ω, которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$P(\Omega) = 1.$$

Невозможным называется событие $\emptyset$, которое в результате опыта не может произойти.

$$P(\emptyset) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий образуют полную группу и несовместны, то они называются *элементарными событиями или исходами*. Если, кроме того, все они равновозможны, то их называют *шансами*.

Исход называется *благоприятным событию*, если появление этого исхода влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся к схеме шансов, то вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N — общее число исходов,

N_A — число исходов, благоприятных событию A.

Пример 1. *Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. Какова вероятность того,*

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0170	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Список литературы

[1] Андрухаев, Х.М. Сборник задач по теории вероятностей / Х.М. Андрухаев. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 2005.

[2] Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: задачи и упражнения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — Изд. 2-е, стер. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.

[3] Володин, Б.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Б.Г. Володин и др.; под ред. А.А. Свешникова. — Изд. 2-е, доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.

[4] Вуколов, Э.А. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов / Э.А. Вуколов и др.; под ред. А.В. Ефимова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

[5] Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. — Изд. 5-е, стер. — М.: Высш. шк., 1999.

[6] Мостеллер, Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями: пер. с англ. / Ф. Мостеллер. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975. (Электронный вариант: `http://ilib.mccme.ru/djvu/50zadach.htm`)

[7] Севастьянов, Б.А. Сборник задач по теории вероятностей / Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

[8] Сотникова, Н.Я. Первоапрельский задачник по теории вероятностей для студентов нематематематиков / Н.Я. Сотникова. — `www.astro.spbu.ru/staff/nsot/Teaching/tver/zadachi.html`

[9] Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1: пер. с англ. / В. Феллер. — М.: Мир, 1984.

что корни этого уравнения окажутся
а) действительными числами, б) целыми числами?

▼ События, о которых идет речь в задаче:
A = {корни действительные},
B = {корни целые}

Элементарными событиями в данной задаче можно считать извлечения одного из данных чисел (то есть извлечение числа 0, числа 1, числа 2 и так далее). Общее количество исходов:

$$N = 10.$$

Для нахождения исходов, благоприятных событию A, достаточно найти количество целых чисел q от 0 до 9, для которых дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 4x + q = 0$ неотрицателен:

$$D = 4^2 - 4q = 4(4 - q) \geqslant 0.$$

Легко видеть, что таких чисел всего 5 (это 0, 1, 2, 3, 4). Поэтому количество благоприятных для события A исходов равно

$$N_A = 5.$$

Отсюда вероятность события

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим вероятность события B. Под исходами будем понимать то же, что и в предыдущем случае. Их количество соответственно останется прежним. Благоприятные для события B исходы, как можно легко заметить, содержатся в благоприятных исходах для A (действительно, для наличия целых корней необходимо, чтобы были хоть какие-то корни). Поэтому для выявления благоприятных исходов можно просто подставить в уравнение $x^2+4x+q=0$ значения q равные 0, 1, 2, 3, 4 (при подстановке которых уравнение имеет корни) и выбрать из них те, при которых корни целые. Непосредственная проверка показывает, что такому условию удовлетворяют числа 0, 3, 4. Значит, количество благоприятных для B исходов

$$N_B = 3.$$

Тогда вероятность соответствующего события

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{3}{10}. \qquad \blacktriangle$$

ŋqdpąeɣ bɆ dədɆbɣəe d ɛəɑbɔɣ ɟdqdɣqə̀