МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие

Составители: Е. П. Белоусова, Т. И. Смагина

Воронеж

Издательский дом ВГУ

2017

1. Конечномерная оптимизация (Математическое программирование)

§1. Конечномерные задачи без ограничений

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to extr, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

1. Необходимое условие экстремума первого порядка.

Пусть $f : E^n \to \mathbb{R}$ и имеет непрерывные частные производные $\partial f/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$. Точка x^0 называется *точкой локального максимума* функции f, если существует окрестность $B(x^0, r)$ такая, что для всех $x \in B(x^0, r)$ выполнено неравенство $f(x^0) \geqslant f(x)$.

Здесь $B(x^0, r) = \{x \in E^n : \|x - x_0\| < r\}$.

Теорема Ферма. Если x^0 - точка локального экстремума дифференцируемой функции f, то $\partial f/\partial x_i = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. Или

$$f'(x^0) = grad\ f(x^0) = 0.$$

Здесь $grad\ f(x)$ - это вектор из частных производных функции $f(x)$ по переменным $x_1, ..., x_n$. Точка x^0 такая, что $grad\ f(x^0) = 0$ называется *стационарной*.

2. Необходимое условие экстремума второго порядка. Достаточное условие. Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки x^0:

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + (f'(x^0), h) + 1/2(f''(x^0)h, h) + o(\|h\|^2). \tag{1.2}$$

Матрица $f''(x^0) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(x^0)$ является симметричной. Симметричная матрица A называется *положительно определенной* [*неотрицательно определенной*], если для всех $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $(Ax, x) > 0$ [$(Ax, x) \geqslant 0$].

§2. Задачи с ограничениями типа равенств.

Необходимые и достаточные условия экстремума. Пусть $f_k : E^n \to \mathbb{R}$, $k = \overline{0, m}$ - дважды дифференцируемые функции. Требуется найти экстремум функции $f_0(x)$ при ограничениях $f_k(x) = 0$, $k = \overline{1, m}$, т.е. решить задачу

$$f_0 \to extr, \quad f_k(x) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.1}$$

Построим *функцию Лагранжа*

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x),$$

где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in E^m$ - *множители Лагранжа.*

Задача на экстремум с ограничениями типа равенств сводится к задаче на безусловную оптимизацию для функции Лагранжа.

Теорема (принцип Лагранжа). Пусть x^0 - точка локального экстремума в задаче (2.1) и функции f_0, f_k, $k = \overline{1, m}$ – непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0. Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $(\lambda_0, \lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ такой, что для функции Лагранжа выполняется условие стационарности

$$L_x(x^0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 f_0'(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k'(x^0) = 0. \tag{2.2}$$

$$L_\lambda(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow f_k(x^0) = 0, \ k = 1, ..., m.$$

Замечание. Для определения x^0, λ_0, λ получаем систему из $n + m$ уравнений, а неизвестных $n+m+1$. Поэтому каждой точке локального экстремума соответствует бесконечное множество наборов множителей Лагранжа.

Если среди систем множителей Лагранжа, соответствующих точке локального экстремума, нет множителей с $\lambda_0 = 0$, то такая точка называется *точкой нормального экстремума.* Для нормальной точки локального экстремума множители Лагранжа определяются однозначно.

Следует рассмотреть два случая:

1) $\lambda_0 = 0$; обычно отсюда следует, что и $\lambda = 0$, т.е. этот случай не подходит;

2) $\lambda_0 \neq 0$; тогда полагают $\lambda_0 = 1$.

Решая систему (2.2), находят все стационарные (подозрительные на экстремум) точки. Дальнейшее исследование проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Условия экстремума второго порядка связаны со знаком матрицы вторых производных L_{xx} функции Лагранжа.

Теорема (необходимое условие минимума). Пусть выполнены следующие условия:

1) x^0 - точка локального минимума в задаче (2.1);

2) функции $f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности этой точки (условие гладкости);

3) градиенты $f_1'(x^0), ..., f_m'(x^0)$ линейно независимы, т.е
$dim L\{f_1'(x^0), ..., f_m'(x^0) = m\}$ (условие регулярности). Оно эквивалентно тому, что $\lambda_0 \neq 0$.

Тогда существует набор множителей Лагранжа
$(\lambda_0, \lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ такой, что для функции Лагранжа задачи (2.1) выполняются условия стационарности

$$L_x(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 f_0'(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k'(x^0) = 0, \quad (2.3)$$

$$L_\lambda(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_k(x^0) = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

где L_x - вектор из частных производных функции Лагранжа по переменным x и неотрицательности:

$$(L_{xx}(x^0, \lambda_0, \lambda)h, h) \geqslant 0 \quad \forall h : \text{таких, что} \quad (f_k'(x^0), h) = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (2.4),$$

где L_{xx} - матрица из вторых частных производных функции Лагранжа по переменным x.

Теорема (достаточное условие минимума). Пусть существует точка x^0, что выполнены условия 2) гладкости и 3) регулярности предыдущей теоремы и существует набор множителей Лагранжа (λ_0, λ), что для функции Лагранжа задачи (2.2) выполняются условие стационарности:

$$L_x(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda_0 f_0'(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k'(x^0) = 0 \quad k = \overline{1, m};$$

$$L_\lambda(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \ \Leftrightarrow \ f_k(x^0) = 0, \quad k = \overline{1, m}$$

и условие положительности:

$$(L_{xx}(x^0, \lambda)h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0 : \text{таких, что} \quad (f_k'(x), h) = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Тогда x^0 - точка локального минимума в задаче (2.2).

Всякое замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ является компактным, поэтому верна

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом множестве в $\mathbb{R}^n$ достигает абсолютных максимума и минимума.

Следствие1. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и $lim_{|x|\to\infty} = +\infty$ ($lim_{|x|\to\infty} = -\infty$), то f достигает своего абсолютного минимума (максимума) на любом замкнутом подмножестве в $\mathbb{R}^n$.

Правило решения. Для решения задачи (2.2) с ограничениями типа равенств следует:

1) составить функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x);$$

2) выписать условие стационарности функции Лагранжа

$$L_x(x^0, \lambda_0, \lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k'(x^0) = 0$$

и ограничения - равенства $f_k(x) = 0,\ k = \overline{1, m}$;

3) из полученной системы найти стационарные точки x^0. Целесообразно проанализировать два случая:

a)$\lambda_0 = 0$. Данный вырожденный случай на практике случается достаточно редко. В большинстве задач это предположение приводит к тривиальности всех множителей Лагранжа. В некоторых примерах удается сразу убедиться в линейной независимости градиентов ограничений при всех допустимых x. Тогда этот вариант рассматривать не надо.

b)$\lambda_0 \neq 0$. В этом случае удобно принять $\lambda_0 = 1$.

4) Найденные стационарные точки исследуются на локальный экстремум с помощью достаточного условия. Иногда стоит проверить квадратичную форму L_{xx} на строгую знакоопределенность на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью критерия Сильвестра и лишь затем (если это будет необходимо) выяснять вопрос о знаке L_{xx} на множестве, определяемом ограничениями задачи.

5) Если не выполняется достаточное условие, то надо проверить выполнение необходимого условия экстремума.

Задача. Найти параметры цистерны, которая при заданной площади поверхности S имеет минимальный объём V.

Если обозначить через x_1 высоту, а через x_2 радиус основания, то приходим к задаче

$$V = \pi x_2^2 x_1 \to min$$

при ограничении $S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2$.

Пример 1. Решить задачу $f_0(x) = 4x_1 + 3x_2 \to extr$ при ограничении $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(4x_1 + 3x_2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Для нахождения стационарной точки выпишем необходимое условие

$$\begin{cases} L_{x_1}: & 4\lambda_0 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ L_{x_2}: & 3\lambda_0 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ L_{\lambda_1}: & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

1). Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 x_1 = 0$ и $\lambda_1 x_2 = 0$, откуда следует, что либо $\lambda_1 = 0$ (чего не может быть), либо $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, чего также не может быть, ибо тогда не выполняется ограничение задачи.

Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$ и можно положить $\lambda_0 = 1$. Из системы

$$\begin{cases} 4 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

находим, что $\lambda_1 = -\frac{2}{x_1}$ и $x_1 = \frac{4}{3}x_2$. Из ограничения задачи $x_1^2+x_2^2 = 1$ следует, что $x_1 = \pm\frac{4}{5}$ и $x_2 = \pm\frac{3}{5}$. Таким образом, получены две стационарные точки $A(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ и $B(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Множитель Лагранжа $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ для точки A и $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ для точки B .

Найдём матрицу вторых производных. Имеем

$$L_{xx} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix},$$

поэтому матрица $L_{xx} < 0$ в точке A и $L_{xx} > 0$ для точки B . Поэтому $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \in loc\, max$, а $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \in loc\, min$.

Пример 2. Решить задачу $f_0 = x_1^2 + x_2^2 \to extr$ при ограничении $x_1^4 + x_2^4 = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1^4 + x_2^4).$$