

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ОБЗОР ПРИНЦИПОВ ПОСТРОЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ**

Учебно-методическое пособие для вузов
Составители: Дегтярев И.С., Яковлев А.Ю.

Воронежский государственный университет

2015

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	4
2.	Основные механико-математические соотношения, используемые при построении ИНС	
2.1.	Принцип работы ИНС. Получение входных данных	5
2.2.	Вывод формул интегрирования в случае поступательного плоскопараллельного движения	6
2.3.	Формулы поворота в случае сложного плоскопараллельного движения	9
2.4.	Итоговые соотношения для интегрирования	10
3.	Перевод вектора ускорения из локальной в глобальную систему координат	
3.1.	Шарнирный замок	11
3.2.	Матричный подход к заданию вращения	11
3.3.	Кватернионный подход к заданию вращения	14
3.4.	Взаимосвязь между самолетными углами, матрицей поворота и кватернионом	17
4.	Фильтрация данных, полученных с датчиков	
4.1.	Основы фильтрации	19
4.2.	Линейный фильтр	21
4.3.	Комплементарный фильтр	22
4.4.	Фильтр Калмана	23
	Заключение	28
	Список литературы	29

при вращении резонатора с переносной угловой скоростью, вектор которой перпендикулярен вектору количества движения, или момента количества движения, соответственно для поступательных или вращательных первичных колебаний инерционной массы.

Основой алгоритма ИНС выступает второй закон Ньютона, который устанавливает зависимость между ускорением \bar{a} тела, его массой m и приложенной силой \bar{F}

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (1)$$

Измерив внешние силы, действующие на тело, произведем интегрирование этого уравнения, и при заданных начальных условиях получим координаты тела [1].

К сожалению, в реальных условиях измерение внешних сил представляет большую сложность. Поэтому целесообразно измерять не приложенные к объекту силы, а ускорения, возникающие при воздействии сил на тело.

2.2. Вывод формул интегрирования в случае поступательного плоскопараллельного движения.

Рассмотрим плоский случай без поворота тела относительно глобальной системы координат, т. е. когда оси акселерометра сонаправлены с осями глобальной системы координат. Движение тела в данном случае будет поступательным.

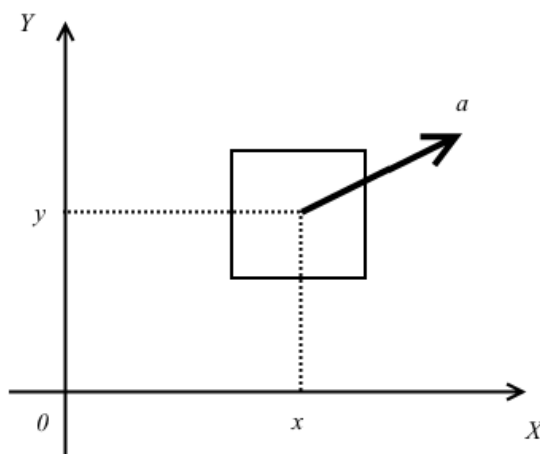


Рисунок 1. Двумерный случай.

По определению скорости точки имеем

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt}, \\ v_y = \frac{dy}{dt}, \end{cases} \quad (3)$$

где v_x, v_y – проекции компонент вектора скорости точки на оси X и Y соответственно, а x и y – величины перемещения объекта вдоль этих осей. Проинтегрируем эту систему уравнений по времени, получим

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} v_x dt = x - x_0, \\ \int_{t_0}^{t_1} v_y dt = y - y_0, \end{cases} \quad (4)$$

где (x_0, y_0) – координаты точки, где было тело в момент времени $t = t_0$.

Если предположить, что скорость была постоянной на промежутке времени $\Delta t = t_1 - t_0$, то получим следующие выражения

$$\begin{cases} v_x \Delta t = x - x_0, \\ v_y \Delta t = y - y_0. \end{cases} \quad (5)$$

По определению ускорения

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \quad (6)$$

или в проекциях

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt}, \\ a_y = \frac{dv_y}{dt}. \end{cases} \quad (7)$$

Проинтегрируем (7) по времени, получим

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} a_x dt = v_x - v_{0x}, \\ \int_{t_0}^{t_1} a_y dt = v_y - v_{0y}, \end{cases} \quad (8)$$

где v_{0x}, v_{0y} – проекции вектора скорости в момент времени $t = t_0$.
Для постоянного ускорения (8) примет вид

$$\begin{cases} a_x \Delta t = v_x - v_{0x}, \\ a_y \Delta t = v_y - v_{0y}. \end{cases}$$

Выразим скорость

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x \Delta t, \\ v_y = v_{0y} + a_y \Delta t. \end{cases} \quad (8.1)$$

Проинтегрируем (8) еще раз по времени

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_x dt dt = \int_{t_0}^{t_1} v_x dt - v_{0x} \Delta t, \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_y dt dt = \int_{t_0}^{t_1} v_y dt - v_{0y} \Delta t. \end{cases} \quad (9)$$

Подставим (4) в (9)

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_x dt dt = x - x_0 - v_{0x} \Delta t, \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_y dt dt = y - y_0 - v_{0y} \Delta t. \end{cases}$$

Откуда получаем выражение координат тела через начальную скорость и ускорение

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \Delta t + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_x dt dt, \\ y = y_0 + v_{0y} \Delta t + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} a_y dt dt. \end{cases} \quad (10)$$

Если предположить, что ускорение было постоянным с $t = t_0$ по $t = t_1$, то выражение (10) переписывается в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \Delta t + a_x \Delta t^2, \\ y = y_0 + v_{0y} \Delta t + a_y \Delta t^2. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, зная ускорение, начальную скорость и начальные координаты тела, мы можем вычислить положение тела.

При написании программного кода по приведенному алгоритму необходимо будет хранить старые координаты тела (x_0, y_0) и его скорость (v_{0x}, v_{0y}) . По этим величинам, используя формулу (11) для вычисления новых координат тела и формулу (8.1) для вычисления новой скорости, будем находить текущие координаты и скорость. Затем, после нахождения текущих значений, заменяем старые координаты и скорость на вновь посчитанные. После чего процесс расчета повторяется.

2.3. Формулы поворота в случае сложного плоскопараллельного движения.

Рассмотрим плоский случай с поворотом, т. е. когда оси акселерометра не совпадают с осями глобальной системы координат, а повернуты относительно них на некоторый угол θ .

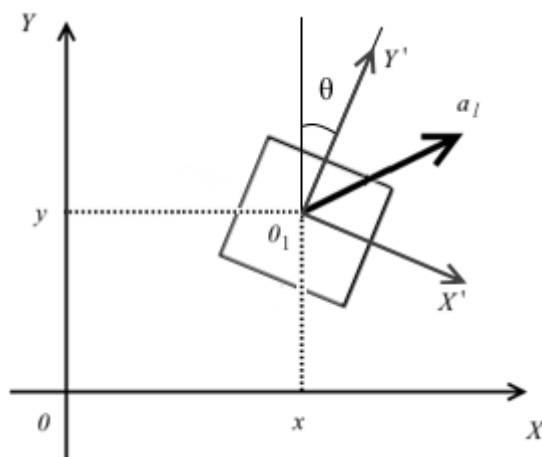


Рисунок 2. Двумерный случай с поворотом.

В этом случае вектор ускорения, который мы будем измерять, будет определен (это связано с положением датчиков, связанных с телом) в локальной системе координат $O_1X'Y'$. Нам необходимо будет перевести вектор ускорения из локальной системы координат в глобальную OXY с помощью поворота локальной системы координат на угол θ .

Осуществим поворот по формулам

$$\begin{cases} a_x = a_x^l \cos \theta - a_y^l \sin \theta, \\ a_y = a_x^l \sin \theta + a_y^l \cos \theta, \end{cases} \quad (12)$$

где (a_x^l, a_y^l) – проекции вектора ускорения тела, измеренные в локальной системе координат.

Осуществив переход, определять положение тела можно по соотношениям (8.1) и (11).

В трехмерном случае мы будем иметь три угла поворота – углы поворота вокруг оси X , Y и Z . Эти углы называют самолетными углами или углами Крылова. Поворот вокруг оси OY называется углом *крена* (θ), вокруг оси OX – углом *тангажа* (φ), и поворот вокруг оси OZ – углом *рысканья* (ψ). Вместо самолетных углов можно использовать углы Эйлера.

В трехмерном пространстве поворот вектора ускорения можно осуществить по формуле

$$\begin{cases} a_x = a_x^l(\cos \theta \cos \psi) + a_y^l(-\cos \theta \sin \psi) + a_z^l(\sin \theta), \\ a_y = a_x^l(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi) + a_y^l(-\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) + \\ \quad + a_z^l(-\cos \theta \sin \varphi), \\ a_z = a_x^l(-\sin \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \psi \sin \varphi) + a_y^l(\sin \theta \sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi) + \\ \quad + a_z^l(\cos \theta \cos \varphi). \end{cases} \quad (13)$$

2.4. Итоговые соотношения для интегрирования.

Перепишем (8.1) и (11) в векторном виде, получим

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}_0 + \bar{a} \cdot \Delta t, \\ \bar{x} &= \bar{x}_0 + \bar{v}_0 \cdot \Delta t + \bar{a} \cdot \Delta t^2. \end{aligned} \quad (14)$$

После преобразования вектора ускорения из локальной системы координат в глобальную, из него нужно вычесть вектор гравитации \bar{g} . С учетом этого (14) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}_0 + (\bar{a} - \bar{g}) \cdot \Delta t, \\ \bar{x} &= \bar{x}_0 + \bar{v}_0 \cdot \Delta t + (\bar{a} - \bar{g}) \cdot \Delta t^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) записаны в глобальной системе координат. Подставлять значение измеренного вектора ускорения в них нужно после перевода вектора ускорения из связанной с летательным аппаратом системы координат в глобальную систему координат, связанную с Землей.

Контрольные вопросы.

1. Перечислите набор чувствительных элементов, который необходим для построения инерциальной навигации. Дайте краткую характеристику по каждому элементу.
2. Охарактеризуйте ситуации с различным вариантом ориентировки осей датчиков.