

Министерство образования и науки РФ

Центр теории и методики обучения математике и информатике
Института стратегии развития образования РАО

ФГБОУ ВО Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого

**А. Р. ЕСАЯН, Н. М. ДОБРОВОЛЬСКИЙ,
Е. А. СЕДОВА, А. В. ЯКУШИН**

ДИНАМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СРЕДА

GeoGebra

Учебное пособие

Часть I

Тула
Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2017

УДК 519.68
ББК 22.18я73
Д46

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *И. М. Буркин*
(Тулский государственный университет);
доктор физико-математических наук, профессор *И. В. Денисов*
(Тулский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого)

Динамическая математическая образовательная среда *GeoGebra*:
Д46 Учеб. пособие / А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. – Ч. I. – 417 с.

ISBN 978-5-9500201-0-0

Замечательным свойством динамической математической образовательной среды *GeoGebra* является опора на двуединство алгебраического и геометрического, проявляющееся в том, что каждому создаваемому алгебраическому объекту сразу же ставится в соответствие некоторый зримый геометрический образ, и наоборот – по каждому строящемуся геометрическому образу формируется его алгебраическое описание. Тем самым реально существующая тесная связь между алгеброй и геометрией получает в *GeoGebra* оперативное визуальное воплощение, что существенно облегчает как обучение различным разделам математики, так и их освоение на любых уровнях образования на качественно новом уровне. Именно этот факт вместе с динамическими возможностями представления геометрических объектов и определяет дидактический потенциал *GeoGebra*, позволяя использовать ее для организации учебного процесса в соответствии с лично-стно ориентированной парадигмой образования, и интенсифицировать учебный процесс за счет активизации познавательной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся. В первой части пособия обсуждается среда разработки приложений *GeoGebra*, достаточно подробно рассказывается об основных треугольных центрах, списках, 2D-графике, ряде задач дискретной математики, электронных таблицах, а также о создании новых пользовательских инструментов.

Пособие ориентировано на студентов, аспирантов, учителей, преподавателей вузов и может быть использовано на семинарских занятиях по специальным и факультативным курсам, связанным с компьютерными методами решения задач, и в частности с построением динамических моделей и экспериментальной проверкой правильности утверждений. Большая часть материала пособия доступна ученикам старших классов профильной школы.

УДК 519.68
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-9500201-0-0

© А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский,
Е. А. Седова, А. В. Якушин, 2017
© ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017

Предисловие

Дидактический потенциал популярной в мире математической программной среды *GeoGebra* определяется ее динамическими возможностями представления геометрических объектов. Использование *GeoGebra* в средней школе и в вузе способствует созданию творческой атмосферы на занятиях и дает возможность:

1) достаточно просто, быстро и качественно создавать статичные геометрические чертежи, а также формировать динамические модели, позволяющие в реальном времени визуализировать и изменяемые данные, и результаты действий над ними;

2) проводить экспериментальную проверку правильности сформулированных утверждений на динамических моделях до проведения соответствующих доказательств. Практика показывает, что при правильно построенной модели и известных теоретических результатах они всегда совпадают с экспериментальными результатами;

3) проводить экспериментальную проверку выдвинутых гипотез, доказательства которых еще неизвестны или их не удалось найти в источниках. Такая проверка значительно повышает правдоподобность любой выдвинутой гипотезы, хотя и не отменяет необходимость ее доказательства;

4) быстро знакомить обучающихся как на основных, так и на факультативных занятиях с интересными геометрическими фактами, не входящими в ту или иную основную программу;

5) использовать замену доказательств экспериментальной проверкой правильности утверждений при реализации различных коррекционных программ, а также на дополнительных занятиях с плохо успевающими учениками;

6) создавать качественные наглядные пособия и чертежи по геометрии.

В предлагаемом учебном пособии обсуждаются основные возможности программного обеспечения *GeoGebra*, которое позволяет достаточно просто создавать разнообразные динамические объекты для их использования на занятиях по математике в средней школе на любых уровнях образования или в вузе. При этом, под динамичностью понимается возможность ручного или автоматического “проигрывания” этапов построения модели или возможность оперативного изменения готовой модели при изменении значений ее конкретных параметров.

Использование динамичности для проигрывания этапов построения модели может использоваться учителем для предварительного создания сложных геометрических чертежей. Последующая работа по поэтапному воссозданию чертежа перед учениками уже не требует от него каких-либо усилий, кроме нажатия кнопок, позволяя полностью сосредоточиться на объяснении самого построения и доказательстве тех или иных утверждений, если прово-

дить их требуется. В качестве примера можно рассмотреть, скажем, построение сечений многогранников методом следов. Заранее подготовленный чертеж исключит потери времени на оперативную правку возможных неточностей при его создании непосредственно на уроке.

Использование динамичности второго типа, когда модель может изменяться вместе с теми или иными параметрами, помогает учителю подводить учеников к самостоятельному формулированию того или иного утверждения. В данном случае построение чертежа может быть лабораторным заданием и для самого ученика. Изменяя параметры модели, он наверняка обратит внимание на имеющиеся инварианты, то есть остающиеся неизменными свойства модели, а это уже прямая и несложная дорога к формулированию некоторого утверждения (теоремы). Остальное в руках учителя, проводить доказательство или не делать этого зависит от реализуемой им программы обучения. Рассмотрим пример. Пусть около окружности описан правильный шестиугольник. Если соединить диагоналями его противоположные вершины, то получим, что все они пересекаются в одной точке, и в данном случае – это центр окружности. Пусть ученик описал вокруг окружности некоторый шестиугольник (убрали слово “правильный”). Соединив противоположные вершины диагоналями, он наверняка обратит внимание, что они снова пересекаются в одной точке. Тем самым он “перепоткрыл” теорему Брианшона (для окружности). Используя динамичность модели, можно легко убедиться, что теорема остается справедливой и в случаях, когда шестиугольник вырождается в пятиугольник или четырехугольник. С продвинутым учеником или студентом можно продолжить исследования и дальше, предложив заменить в рассмотренной задаче окружность эллипсом или другим коническим сечением и т. д.

Пособие ориентировано на школьников, студентов, аспирантов, учителей, преподавателей вузов и может быть использовано на семинарских занятиях по специальным и факультативным курсам, связанным с динамической математикой. Большая часть материала пособия доступна ученикам средних и старших классов школ, которые обучаются как по общеобразовательным, так и по специализированным программам.

Пособие создано в рамках выполнения исследований по грантам РФФИ № 15-41-03262_р_центр_а, № 16-41-710194_р_центр_а, и издано при финансовой поддержке этого гранта.

Авторы признательны всем людям, которые ознакомились с различными частями рукописи и внесли полезные предложения по их улучшению. Особенно хотелось бы поблагодарить коллег по работе: Монахова В. М., Абдуразакова М. М., Шулюпова В. А., Реброву И. Ю., Титова А. В., Ванькову В. С., Мартынюк Ю. М., Ваныкину Г. В., Сундукову Т. О., Лапицкую Л. П., Торину Е. Г., Даниленко С. В. и др. С авторами пособия можно связаться по электронной почте:

esayanalbert@mail.ru

elena-sedova@yandex.ru

dobrovol@tspu.tula.ru

yakushin@tspu.tula.ru

Введение

Многие системы компьютерной графики дают возможность создавать статичные геометрические чертежи (графики функций, конструкции, схемы, диаграммы состояний и т. п.), которые и являются конечным продуктом соответствующих действий. Но существуют и такие математические среды, в которых при создании чертежей в памяти и в файле сохраняется не только сам сформированный чертеж, но также автоматически записываемый алгоритм его построения и исходные данные. При этом данные легко доступны для изменений, а уже существующий алгоритм построения тут же применяется к ним заново. Все это позволяет в реальном времени видеть преобразования чертежа вместе с изменением начальных данных. Именно эту триаду из исходных данных, алгоритма и чертежа и называют динамической моделью. А математические среды, которые позволяют создавать динамические модели, называют “системами динамической геометрии”, “интерактивными геометрическими системами” или “средами динамической математики”. Стоит заметить, что идея использования интерактивных геометрических сред в обучении возникла задолго до появления компьютеров и принадлежит Ф. Клейну и А. Пуанкаре. Ф. Клейн в “Эрлангенской программе” писал об изучении геометрии через движение, а А. Пуанкаре говорил об использовании динамических образов при решении геометрических задач.

Система *GeoGebra* относится к новому поколению учебного программного обеспечения. Она используется для визуализации математических объектов и создания их динамических моделей. Читатели, которые знакомы с приложением *Mathtype* фирмы *Design Science* для вставки сложных математических выражений в документы, хорошо понимают всю простоту и мощь этого специализированного редактора формул. Так вот, одна из возможностей приложения *GeoGebra* по простоте и мощи напоминает *MathType*, только ее ниша не формулы, а чертежи геометрических задач. Но *GeoGebra* позволяет создавать не только статичные чертежи, но и формировать сложные динамические (анимационные) модели, строить графики функций, символично или приближенно решать ряд математических задачи, работать с электронными таблицами, проводить компьютерные эксперименты и т. п. Поэтому *GeoGebra* часто называют виртуальной математической лабораторией.

Основные понятия *GeoGebra* – объекты и инструменты. Объекты могут быть алгебраическими и геометрическими. Наборами специальных инструментов создаются те или иные объекты, причем одновременно, как в форме алгебраического описания, так и в виде соответствующего ему геометрического образа. Объекты обладают свойствами, которые достаточно просто можно изменять. Роль инструментов выполняют встроенные программные модули, приводящиеся в действие или щелчками левой кнопки мыши по кнопкам пиктографического меню или с помощью ввода специальных команд. Допускается создание пользовательских инструментов. Из объектов и

формируются динамические модели – чертежи, графики, рисунки, конструкции, схемы, диаграммы состояний и т. п. и их описания.

Слово “динамическая” в сочетании с *GeoGebra* предполагает наличие динамичности двух типов [53]. Суть первого типа динамичности такова. Если некая геометрическая модель уже создана, то всегда возможно пошаговое (покадровое) ручное или автоматическое последовательное развертывание процесса построения модели. Причем делать это можно многократно, с любого места и в любом направлении. Более того, просмотр процесса построения модели может быть организован как шагами, которыми модель изначально формировалась, так и более крупными шагами, объединяющими в себе по несколько последовательных исходных шагов. Заметим, что первый тип динамичности в моделях *GeoGebra* всегда присутствует. Суть второго типа динамичности такова. Если в модели некоторые параметры являются переменными (позиция точки, длина отрезка, величина угла и т. п.), то их изменение легко проводится управляющими элементами мыши или с помощью клавиатурных ключей, а результат этих изменений тут же виден и на модели, и в ее алгебраическом описании.

Первая версия *GeoGebra* появилась совсем недавно – в 2002 г. Ее автором является австрийский математик, профессор университета Зальцбурга Маркус Хохенвартер (*Markus Hohenwarter*) [54, 55]. *GeoGebra* была задумана в качестве средства, объединяющего возможности систем интерактивной геометрии типа *Cabri Geometry*, *The Geometer's Sketchpad* и т. п. и систем компьютерной алгебры типа *Derive*, *Maple* и т. п. в единую интегрированную систему обучения и изучения математики. Программа написана на языке *Java*, является свободно распространяемой, кроссплатформенной (*Windows*, *Linux*, *Mac OS* и др.), представлена более чем на 60 языках, имеет обширное сетевое сообщество, работает на персональных компьютерах, планшетах, смартфонах. Странное слово *GeoGebra* – это аббревиатура типа мопед (мотоцикл+велосипед). Составлено оно из начальной и конечной частей слов ***Geometry*** и ***Algebra***. С самого начала система позиционируется в качестве “Динамической математики для всех”, то есть для любого уровня образования. В настоящее время *GeoGebra* непрерывно развивается и совершенствуется М. Хохенвартером и большой группой его почитателей и последователей со всего мира. Обновления системы выходят практически каждую неделю. Последняя вышедшая версия системы для платформы *Windows* – *GeoGebra 5.0-279.0*.

Замечательным свойством *GeoGebra* является опора на двуединство алгебраического и геометрического, проявляющееся в том, что каждому создаваемому алгебраическому объекту сразу же ставится в соответствие некоторый зримый геометрический образ и наоборот, по каждому строящемуся геометрическому образу формируется его алгебраическое описание. Тем самым, реально существующая тесная связь между алгеброй и геометрией получает в *GeoGebra* оперативное визуальное воплощение, что существенно облегчает как обучение различным разделам математики, так и их освоение на любых уровнях образования на качественно новом уровне. Именно этот факт вместе


с динамическими возможностями представления геометрических объектов и определяет дидактический потенциал *GeoGebra*, позволяя использовать ее для организации учебного процесса в соответствии с личностно-ориентированной парадигмой образования, и интенсифицировать учебный процесс за счет активизации познавательной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся. С помощью *GeoGebra* можно проводить экспериментальную проверку правильности сформулированных утверждений, в том числе и проверку выдвинутых гипотез, доказательства которых еще неизвестны или их не удалось найти в источниках. Подобная проверка значительно повышает правдоподобность любой выдвинутой гипотезы, хотя и не отменяет необходимость ее доказательства.

Нельзя сказать, что интерфейс *GeoGebra* с пользователем является традиционным или современным ленточным – он весьма специфичен. Но его оригинальность не есть плод фантазии или прихоти разработчиков, а вытекает из своеобразия решаемых системой проблем. В нем много неожиданных, изящных и полезных находок, которые не просто облегчают работу с системой, а делают ее интересным и увлекательным занятием, не требующим отвлечения на технические детали, мало связанные или совсем не связанные с решаемой задачей. Одно из неоспоримых достоинств интерфейса *GeoGebra* – это наличие не только пиктографических меню инструментов и обычных контекстных меню, но и контекстных пиктографических меню объектов. При этом традиционные характеристики хорошего интерфейса, такие как понятность, удобство, дружелюбность и легкость запоминания в полной мере относятся и к интерфейсу *GeoGebra*.

Наряду с *GeoGebra* имеется много других продолжающих развиваться систем серии “Динамическая математика”. Среди них можно отметить: *GeoNext* (Германия, коммерческая), *The Geometer's Sketchpad* (Англия, коммерческая), *Cabri Geometry* (Франция, коммерческая), а также *KSEG* (свободная), *Kig* (свободная), *Desmos* (графический онлайн-калькулятор) и т. д. Обширный список подобных систем и их сравнительные характеристики можно найти по адресу: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software. Отметим также серию коммерческих программных сред для поддержки уроков математики и информатики в средней школе, разработанных в Институте Новых Технологий (г. Москва): “АвтоГраф”, “Живая математика” (вариант *The Geometer's Sketchpad*), “Интерактивная стереометрия”, “Живая статистика”, “Логомиры” (творческая среда и вероятности) и т. п. Получить информацию по ним можно по адресу: <http://www.int-edu.ru/content/matematika-i-informatika-0>.

Справочные материалы, многочисленные примеры и последняя версия *GeoGebra* доступны по адресу: <http://www.geogebra.org>, установка системы не требует каких-либо ухищрений, а установка ее новых версий может проводиться автоматически. Остается пожелать удачи в освоении *Geogebra* тем, кто решился на этот шаг, и уверить их в том, что сожалеть об этом не придется.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
I. Среда разработки приложений	8
1.1. Основные панели	8
1.2. Элементы интерфейса	9
2. Панели “Объекты” и “Полотно”	12
2.1. Связь алгебры и геометрии	12
2.2. Объекты	13
2.3. Выделение объектов	16
2.4. Некоторые операции с объектами	18
2.5. Изменение свойств объектов	20
2.6. Создание динамических моделей	25
2.6.1. Использование алгебраических средств	26
2.6.2. Использование геометрических средств	29
2.6.3. Панель “Протокол”	31
3. Средства для работы с панелями “Объекты” и “Полотно”	35
3.1. Пиктографические меню панелей	35
3.2. Пиктографические меню панели “Полотно”	36
3.3. Инструменты и команды	37
3.3.1. Перемещение объектов	37
3.3.2. Перемещение и масштабирование чертежа	40
3.3.3. Точки	43
3.3.4. Прямые	49
3.3.5. Специальные прямые	53
3.3.6. Многоугольники	65
3.3.7. Окружности	68
3.3.8. Конические сечения	75
3.3.9. Углы, длины, площади	90
3.3.10. Линейные и нелинейные преобразования объектов	101
3.3.11. Тексты и рисование	114
3.3.12. Логические выражения.....	120
3.3.13. Управляющие элементы	127
3.4. Пример использования панели “Полотно 2”	140
4. Вставка текстов и формул	143
4.1. Формирование текстов инструментом “  Текст”	143
4.1.1. Управляющие элементы панели “Текст”	144
4.1.2. Символы Юникода списка “Символы”	145
4.1.3. Список “ <i>LaTeX-формула</i> ” и его подписки	148
4.1.4. Дроби, степени, корни, индексы	150
4.1.5. Пределы операторов	152
4.1.6. Скобки переменных размеров	153

4.1.7. Парные скобки на разных строках	154
4.1.8. Скобки предопределенных размеров	155
4.1.9. Дополнительные диакритические знаки	156
4.1.10. Матрицы	157
4.2. Команды для работы с текстами	159
5. Центры треугольника и их свойства	166
5.1. Некоторые центры треугольников	166
5.2. Инцентр	169
5.3. Центроид	175
5.4. Центр описанной окружности	180
5.5. Ортоцентр	190
5.6. Центр окружности 9 точек	201
5.7. Точка Лемуана	210
5.8. Точка Жергонна	217
5.9. Точка Нагеля	222
5.10. Средняя точка	229
5.11. Центр Шпикера	235
5.12. Точки Фейербаха	241
5.13. Точка, гармонически сопряженная точке Фейербаха	249
5.14. Точки Ферма	251
5.15. Точки Аполлония	261
5.16. Точки Наполеона	266
5.17. Обобщенные точки Наполеона	272
6. 2D-графики	281
6.1. Точечные графики	281
6.2. Графики функций одной переменной	284
6.3. Графики неявных функций	286
6.4. Графики параметрических функций	288
6.5. Графики функций в полярных координатах	290
6.5.1. Алгебраический подход	291
6.5.2. Геометрический подход	293
6.6. Специальные графики	297
6.6.1. Гистограммы	297
6.6.1.1. Вывод гистограмм командой <i>BarChart</i>	297
6.6.1.2. Вывод гистограмм командой <i>Histogram</i>	301
6.6.1.3. Вывод гистограмм командой <i>HistogramRight</i>	303
6.6.2. Диаграммы размаха	304
6.6.3. Частотные точечные графики	308
6.6.4. Графики частотного полигона	310
6.6.5. Пошаговые графики	311
6.6.6. Палочные графики	314
6.6.7. Графики остатков	315
7. Работа со списками	316
7.1. Простые и вложенные списки	316

7.2. Создание списков	317
7.3. Операции и функции с числовыми списками	323
7.4. Выборки элементов из списков	324
7.5. Выборки элементов с помощью логических функций	327
7.6. Добавления, удаления, вставки, вырезки	328
7.7. Объединение, соединение и пересечение списков	330
7.8. Суммы и произведения элементов списков	331
7.9. Сортировка и связанные с ней команды	332
7.10. Сглаживание и другие команды	333
7.11. Представление списков объектами типа “раскрывающийся список”	334
7.12. Работа с матрицами и векторами	335
7.12.1. Работа с матрицами	335
7.12.2. Работа с векторами	340
7.13. Выполнение команд из списков	341
8. Некоторые задачи дискретной математики	343
8.1. Задача о кратчайшем пути	343
8.2. Задача коммивояжера	346
8.3. Нахождение выпуклой оболочки точек	349
8.4. Диаграмма Вороного	350
8.5. Триангуляция Делоне	351
8.6. Нахождение минимального остовного дерева	353
9. Создание новых инструментов	355
9.1. Инструмент “Треугольник и углы”	355
9.2. Инструмент “Окружность и центр”	360
9.3. Инструмент “Деление отрезка на равные части”	361
9.4. Задачи для создания новых инструментов	362
9.4.1. Теорема о “бабочке”	362
9.4.2. Теорема Эйлера	364
9.4.3. Аналог теоремы Эйлера	365
9.4.4. Интересное соотношение	366
9.4.5. Теорема Мансиона	366
9.4.6. Прямая Эйлера	368
9.4.7. Окружность 9 точек	368
9.4.8. Теорема Фейербаха	369
9.4.9. Пересечение четырех окружностей девяти точек	369
10. Электронные таблицы	371
10.1. Инструменты панели “Таблица”	371
10.2. Открытие и закрытие таблицы	372
10.3. Имена столбцов, строк и ячеек таблицы	374
10.4. Ввод чисел, точек и формул	374
10.5. Навигация по ячейкам	377
10.6. Активные ячейки и активные группы ячеек	378
10.7. Выделенные ячейки	380

10.8. Копирования, вырезки и вставки данных	382
10.9. Копирования данных с помощью маркеров	383
10.10. Команды для работы с таблицами	387
10.11. Создание некоторых объектов	389
10.12. Формирование характеристик элементов таблицы	393
Приложение. Встроенные (предопределенные) математические функции <i>GeoGebra</i>	399
Литература и интернет-ресурсы	405
Алфавитный указатель команд, функций, операторов и других средств <i>GeoGebra</i>	409