

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебное пособие

Улан-Удэ
2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ДОРЖИ БАНЗАРОВА»

МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

*Рекомендовано Экспертным советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлениям
подготовки 01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и
информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение
и администрирование компьютерных систем,
09.03.03 Прикладная информатика*

Улан-Удэ
Издательство Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова
2025

УДК 515.124.32(075.8)

ББК 22.152.13я73

М 546

Утверждено Экспертным советом университета
Протокол № 9 от 10 июня 2025 г.

Рецензенты

И. Б. Юмов

канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры фундаментальной математики,
БГУ им. Д. Банзарова

В. Н. Ханхасаев

канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Высшая математика», ВСГУТУ

М 546 **Метрические и нормированные пространства:** учебное пособие / составители О. Ю. Николаев, М. А. Дониленко. Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета им. Д. Банзарова, 2025. 86 с. ISBN 978-5-9793-1037-4

Пособие содержит теорию метрических пространств, являющихся пространствами с метрикой, или метризуемых пространств. Метризуемость пространства позволяет ввести топологию данного пространства и рассмотреть различные континуальные пространства с единой топологической точки зрения.

Предназначено обучающимся по направлениям подготовки 01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование компьютерных систем, 09.03.03 Прикладная информатика.

УДК 515.124.32(075.8)

ББК 22.152.13я73

© О. Ю. Николаев, М. А. Дониленко,
составление, 2025

© Бурятский госуниверситет
им. Д. Банзарова, 2025

ISBN 978-5-9793-1037-4

Предисловие

Учебное издание представляет собой учебное пособие «Метрические и нормированные пространства» для дисциплины «Функциональный анализ» в рамках реализации образовательной программы высшего образования по направлениям подготовки 01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование компьютерных систем, 09.03.03 Прикладная информатика очной и заочной форм обучения. Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательным дисциплинам вариативной части в структуре образовательной программы бакалавриата. Изучение дисциплины направлено на формирование профессиональной компетенции ОПК-1.3 — способности применять физико-математический аппарат для моделирования (формализации) объектов или процессов реального мира.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

знать:

- основы теории множеств;
- теоретические основы функционального анализа;

уметь:

- определять цель и задачи исследования, подход к объекту как к системе;
- применять общие методы к решению конкретных задач, связанных с дифференциальными и интегральными уравнениями;
- решать типовые задачи, способствующие углубленному пониманию основных математических объектов;

владеть:

- навыками анализа свойств основных математических объектов, широко применяемых в прикладных задачах;
- общим пониманием аппарата современного анализа, методами и подходами, используемыми в теории меры и интеграла, и теории операторов в основных функциональных пространствах.

В учебном пособии излагается курс лекций по функциональному анализу, раздел «Метрические пространства и нормированные пространства», обобщающий опыт преподавания этой дисциплины в Институте математики, физики и компьютерных наук Бурятского государственного университета.

Необходимость написания этого пособия обусловлена рядом причин. В первую очередь, это стремление оказать посильную помощь студентам в усвоении таких основополагающих понятий функционального анализа, как метрика, сходимость, топология, пополнение метрических пространств, принцип сжимающих отображений, нормированные пространства. С этой целью в пособии много места отводится разобранным примерам и задачам различной сложности для раскрытия содержания этих понятий.

Пособие содержит традиционный материал и разбито на параграфы с делением материала на теоретическую часть, примеры и задачи для самостоятельного изучения. Основной задачей пособия представляется изложение материала таким образом, чтобы, наряду с его усвоением, у студентов развивалось логическое мышление и вырабатывались навыки использования теории для решения практических задач. Для решения тех же задач при изложении материала предлагаются упражнения, которые фактически являются теоремами, дополняющими теоретический материал.

Данное пособие поможет студентам, изучающим курс «Функциональный анализ», в освоении понятий и приемов функционального анализа метрических и нормированных пространств.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1	
МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА	5
1 ПОНЯТИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА	5
2 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ. ЗАМЫКАНИЕ	8
3 ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА	9
ЗАДАЧИ	10
4 СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ	13
5 ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	14
6 ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ	14
7 ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	18
ЗАДАЧИ	20
8 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА	26
9 НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ	29
10 ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ	30
ЗАДАЧИ	32
Примеры решения задач	37
Задачи для самостоятельной работы	63
Глава 2	
НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	69
1 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	69
ЗАДАЧИ	72
2 ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА	75
ЗАДАЧИ	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	82