

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

Д.А. ПОЖАРСКИЙ, А.А. МОЛЧАНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И КЛИНА

Получены асимптотические решения двух новых задач теории упругости со смешанными граничными условиями. Первая задача – о трещине сдвига в полосе при разных вариантах граничных условий на внешних гранях полосы. Вторая – контактная задача для трехмерного клина при действии сосредоточенной силы вне области контакта на ребре клина и скользящей заделке другой грани.

Ключевые слова: теория упругости, смешанные граничные условия, асимптотики.

Введение. Актуальность задач механики разрушения [1] не вызывает сомнений. Однако до сих пор были исследованы только задачи о трещине нормального отрыва в упругой полосе [2]. В настоящей работе строится асимптотическое решение задачи о трещине продольного сдвига в полосе. Задачи о трещинах тесно связаны с контактными задачами (в обоих типах задач возникают смешанные граничные условия) [3–5]. Реальная поверхность часто имеет микронеровности, поэтому контакт может происходить одновременно на нескольких участках. Для изучения дискретного контакта (взаимодействия нескольких штампов) важно заранее получить решение задачи о действии дополнительной сосредоточенной силы вне области контакта упругого клина [4, 5].

1. Трещина сдвига в полосе. Постановка задачи. В декартовых координатах x, y рассмотрим упругую полосу $\{x \in (-\infty, \infty); y \in [0, 2h]\}$ толщины $2h$. Предполагаем, что в рамках линейной теории упругости материал полосы характеризуется двумя параметрами упругости: G – модуль сдвига и ν – коэффициент Пуассона. Пусть обе грани полосы $y = 0, y = 2h$ жестко заделаны (вариант А), находятся в условиях скользящей заделки (вариант Б) или свободны от напряжений (вариант В). В середине полосы при $y = h$ имеется трещина продольного сдвига (разрез), занимающая область $x \in (-a, a)$, нагруженная по обоим берегам заданной касательной нагрузкой $\tau(x)$. Полагаем, что нормальное напряжение $\sigma_y = 0$ при $x \in (-\infty, \infty), y = h$ [1]. Требуется определить скачок касательного перемещения в области трещины $u(x) = \pm u_x(x, h \pm 0)$. Затем может быть определен коэффициент интенсивности касательного напряжения в кончике трещины, ответственный (согласно критерию разрушения) за ее дальнейшее распространение.

Асимптотическое решение. В силу одинаковости напряженно-деформированного состояния достаточно рассматривать лишь половину полосы $0 \leq y \leq h$. Для вывода интегрального уравнения относительно функции $u(x)$ рассмотрим вспомогательные краевые задачи с граничными условиями вида

$$y = 0: \quad \text{А) } u_x = 0, \quad u_y = 0; \quad (1)$$

$$y = 0: \quad \text{Б) } \tau_{xy} = 0, \quad u_y = 0; \quad (2)$$

$$y = 0: \quad \text{В) } \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0; \quad (3)$$

$$y = h: \quad \sigma_y = 0; \quad u_x = -u(x). \quad (4)$$

Здесь $u(x)$ – временно известная функция, равная нулю при $x \notin (-a, a)$. Для решения краевых задач (1)–(4) воспользуемся общим решением дифференциальных уравнений равновесия Ламе плоской задачи теории упругости в форме Папковича–Нейбера и преобразованием Фурье. Затем для получения интегрального уравнения в области трещины используем граничное условие (с заданной правой частью)

$$\tau_{xy}(x, h) = -\tau(x), \quad (5)$$