ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Романов И.В.
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»)

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ПРИВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СОСТОЯНИЕ ПОКОЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНЫХ СИЛ

В данной работе рассматриваются задачи точного управления колебаниями двумерных пластин с помощью граничных сил. Будем говорить, что систему можно привести в состояние покоя, если для любых начальных условий можно найти управление, такое что соответствующее ему решение обратится в нуль за конечное время, причем данное решение должно остаться в нулевом состоянии в дальнейшем. Доказывается, что в случае определенных условий наложенных на управляющее воздействие некоторые системы с распределенными параметрами невозможно привести в состояние покоя за конечное время.

Ключевые слова: *колебания пластины, невозможность приведения системы с распределенными параметрами в состояние покоя.*

SOME DISTRIBUTED SYSTEMS. LACK OF CONTROLLABILITY TO REST

In this article we consider the exact control of vibrations of plates by boundary forces. The system is controllable to rest when for every initial condition we can find a control such that the corresponding solution hits 0 in the finite time and this solution will not leave 0 in the future. We shall prove that some specific distributed systems are not controllable to rest if some conditions are imposed on the control function.

Keywords: *vibrations of a plate, lack of controllability to rest.*

Ранее вопрос об управлении колебаниями двумерной пластины с помощью граничных сил рассматривался многими авторами (см. например, [5,6]). В монографии [1] рассматривается задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления, доказывается, что возможно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия и дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. В монографии [2] рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л.С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. В данной работе доказывается, что колебания некоторых типов двумерных пластин невозможно успокоить непрерывным равномерно распределенным граничным управлением для достаточно широкого класса начальных возмущений.

Пусть Ω ограниченная двумерная область с кусочно-гладкой границей, T некоторое положительное число, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ боковая поверхность Q_T. Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебания двумерной пластины.

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T); \\
y\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad y_t'\Big|_{t=0} = \psi(x); \\
\frac{\partial y}{\partial n} = R(x,t) \quad \text{на} \quad \Sigma, \qquad \frac{\partial \Delta y}{\partial n} = P(x,t) \quad \text{на} \quad \Sigma.
\end{gathered} \tag{1}$$

Функции $R(x,t)$ и $P(x,t)$ можно понимать как распределенные по границе двумерной пластины управляющие воздействия.

Определение. Функция $y(x,t) \in L_2(Q_T)$ называется слабым решением задачи (1), если для любой гладкой пробной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество

$$\iint_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int_\Omega (\varphi\Theta_t' - \psi\Theta)\Big|_{t=0} dx - \int_\Sigma P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma -$$
$$- \int_\Sigma R(x,t)\Delta\Theta(x,t)d\Sigma,$$

где $\Theta(x,t)$ классическое решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) \Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T; \\
\Theta\Big|_{t=T} = 0, \qquad \Theta_t'\Big|_{t=T} = 0; \\
\frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \qquad \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.
\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ системы собственных значений и собственных функций оператора Лапласа возведенного в квадрат задачи Рикье в области Ω, т.е. $\Delta^2 X_i(x) - \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в Ω, $\frac{\partial X_i}{\partial n} = \frac{\partial \Delta X_i}{\partial n} = 0$ на ∂ Ω. Система собственных функций, определенная выше, является полной в $L_2(\Omega)$, так как она совпадает с системой собственных функций в задаче Неймана для оператора Лапласа.

Определим функцию $T_n(t)$ для любого целого положительного номера *n* как решение дифференциального уравнения

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int_{\partial\Omega} X_n(x)[P(x,t) + \lambda_n R(x,t)]d\sigma \tag{3}$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n$, $T_n'(0) = \psi_n$, где φ_n и ψ_n коэффициенты разложения φ и ψ в ряды Фурье по собственным функциям, т.е.

$$\varphi_n(x) = \int_\Omega \varphi(x)X_n(x)dx, \quad \psi_n(x) = \int_\Omega \psi(x)X_n(x)dx.$$

а также положим

$$y_N(x,t) := \sum_{n=0}^{N} X_n(x) T_n(t).$$

Сформулируем лемму, доказанную в [3].

Лемма. Пусть $P(x,t)$ и $R(x,t)$ произвольные непрерывные функции на боковой поверхности Σ, $\varphi \in H^4(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (1).

Данная лемма позволяет свести исходную задачу граничного управления системой (1) к задаче управления счетной системой осцилляторов (3).

Пусть далее управляющие воздействия *R* и *P* в системе (1) не зависят от переменной *x*, а зависят только от времени *t*. Покажем в начале, что пластину прямоугольной и круглой форм невозможно привести в состояние покоя для достаточно широкого класса начальных возмущений, в случае когда функции управления являются непрерывными на интервале $(0,T)$, где $T > 0$ произвольный момент времени.

Пусть $T > 0$ заданный момент времени, a_1, a_2 произвольные положительные числа, $R(t)$ и $P(t)$ произвольные непрерывные на интервале $(0,T)$ функции.

Теорема. Пусть $\Omega = (0,a_1) \times (0,a_2)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ произвольные функции из пространств $H^4(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ соответственно и функция $y(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T); \\
y\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad y'_t\Big|_{t=0} = \psi(x); \\
\frac{\partial y}{\partial n} = R(t) \quad \text{на} \quad (0,T), \qquad \frac{\partial \Delta y}{\partial n} = P(t) \quad \text{на} \quad (0,T).
\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда, если существует хотя бы один натуральный индекс *n,* такой что число $\lambda_n \varphi_n \cos[(\lambda]_n T) + \psi_n \sin[(\lambda]_n T)$ отлично от нуля, то не существует такого момента времени *T* и таких управляющих воздействий $R(t)$ и $P(t)$, при которых функция $y(x,T)$ была бы равной нулю тождественно в области Ω.

Доказательство. Пусть начальные данные в задаче (4) выбраны так, что существует хотя бы один натуральный индекс *n,* такой, что число $\lambda_n \varphi_n \cos[(\lambda]_n T) + \psi_n \sin[(\lambda]_n T)$ отлично от нуля. Предположим, что найдутся момент времени *T* и функции $R(t)$ и $P(t)$, при которых функция $y(x,T)$ была бы равной нулю тождественно в области Ω. Согласно лемме, вопрос приведения в покой системы (4) эквивалентен задаче приведения в покой счетной системы осцилляторов (3).

Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений (3) с заданными начальными условиями для всех натуральных индексов *n*. Заметим, что в данном случае функции *P* и *R* зависят только от переменной *t*. Запишем решения этих уравнений для всех натуральных индексов *n*:

ŋqdqyeY bⱻ dəqⱻbYзə d ɛɔɑɓɔʎ ɟqdqYqʎè