

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К82

Электронные версии книг
на сайте www.prospekt.org

*Под редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора, академика РАН
В. А. Ильина*

Крицков Л. В.

Высшая математика в вопросах и ответах: учеб. пособие / под ред.
К82 В. А. Ильина. — Москва : Проспект, 2014. — 176 с.

ISBN 978-5-392-14372-6

Данное пособие предлагает краткое изложение курса высшей математики для студентов вузов. Учебный материал изложен в удобной форме ответов на ключевые вопросы и содержит такие разделы, как аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения и т. д.

В пособии приведены все основные определения и утверждения курса, многие из которых снабжены примерами, разъяснениями и иллюстрациями.

Для студентов, обучающихся по техническим специальностям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Крицков Леонид Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен компанией ООО «Оригинал-макет»
www.o-maket.ru; тел.: (495) 726-18-84

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.004173.04.09 от 17.04.2009 г.

Подписано в печать 25.02.2014. Формат 60×90 ¹/₁₆.
Печать офсетная. Печ. л. 11,0. Тираж 500 экз. Заказ №

ООО «Проспект»
111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 7, стр. 4.

ISBN 978-5-392-14372-6

© Л. В. Крицков, 2014
© ООО «Проспект», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Вещественные числа. Множества

вещественных чисел	3
Какие основные числовые множества рассматриваются в математике?	3
Что такое рациональное число?	3
Что относят к основным свойствам рациональных чисел?	4
Какую роль играют бесконечные десятичные дроби при введении понятия вещественного числа?	5
Как сравнить вещественные числа?	5
Какие множества вещественных чисел называют ограниченными?	6
Что называют точной верхней и точной нижней гранями множества?	6
Как определить сумму и произведение вещественных чисел?	7
Какими свойствами обладают вещественные числа?	8
В чем заключается аксиоматический метод введения вещественных чисел?	8
Какие типы множеств вещественных чисел часто используются в математике?	8

Глава 2. Системы координат и их простейшие

применения.....	10
Что называют осью?	10
Что такое направленный отрезок на оси и его величина?	10
Какие направленные отрезки называют равными?	10
Какие операции над направленными отрезками называют линейными?	10
Как вводятся декартовы координаты на прямой?	11

Как найти величину и длину заданного направленного отрезка на оси?	11
Как вводятся декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве?	12
Как найти расстояние между точками на плоскости и в пространстве?	13
Как найти координаты точки, делящей заданный отрезок в известном отношении?	13
Как вводятся полярные координаты на плоскости?.....	14
Как вводятся цилиндрические координаты в пространстве? ...	14
Как вводятся сферические координаты в пространстве?	15
Что такое комплексные числа и как определяются алгебраические операции над ними?.....	15
Какими основными свойствами обладают комплексные числа?	16
Что называется алгебраической формой записи комплексного числа?	17
В чем состоит операция сопряжения комплексных чисел и какими свойствами она обладает?	17
Как изображаются комплексные числа?	17
Что называется тригонометрической формой записи комплексного числа?	18
Как можно использовать тригонометрическую форму записи при умножении и делении комплексных чисел?	18
Как извлекается корень степени n из комплексного числа?	19

Глава 3. Определители и системы линейных уравнений..... 20

Что называют квадратной матрицей?	20
Что называют определителем второго порядка?	20
Как можно использовать определители второго порядка для исследования и отыскания решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?	20
Что называют определителем третьего порядка?	21
Какими основными свойствами обладают определители?	22

Как можно свести определитель третьего порядка к вычислению определителей второго порядка?	23
Как можно использовать определители третьего порядка для отыскания решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными?	24
Как можно использовать определители для отыскания решений однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными?	25
Как можно использовать определители для исследования однородной системы трех уравнений с тремя неизвестными?	25
Что можно сказать о множестве решений неоднородной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если ее определитель равен нулю?	26
Как можно ввести определители любого порядка?	26
В чем состоит метод Гаусса исследования и отыскания решения линейной системы?	27

Глава 4. Векторная алгебра 30

Что такое геометрический вектор?	30
Какие операции над векторами принято называть линейными?	30
Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?	31
В чем состоит критерий коллинеарности двух векторов?	31
Что такое проекция вектора на ось и каковы ее основные свойства?	31
Как определяются декартовы прямоугольные координаты вектора?	32
Что называется скалярным произведением векторов?	32
Какими свойствами обладает скалярное произведение?	33
Как найти скалярное произведение векторов, зная их координаты?	33
Как определяется ориентация тройки векторов в пространстве?	34
Что называется векторным произведением векторов?	35
Что называется смешанным произведением векторов?	35

В чем состоит геометрический смысл векторного произведения?	35
В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?	36
Какими алгебраическими свойствами обладают векторное и смешанное произведения?	36
Как найти векторное и смешанное произведения, зная координаты перемножаемых векторов?	37
Что называют двойным векторным произведением?	37

Глава 5. Преобразование декартовых прямоугольных координат..... 38

Как меняются координаты точки на плоскости при параллельном переносе системы координат и при повороте системы координат вокруг начала?	38
Как меняются координаты точки в пространстве при параллельном переносе?	39
Как связаны координаты точки пространства в двух произвольных системах координат с общим началом?	39

Глава 6. Основы аналитической геометрии 41

Что называется алгебраической линией n -го порядка?	41
Что называется алгебраической поверхностью n -го порядка?	41
Как можно описать линию в пространстве?	42
Как можно задать прямую линию на плоскости?	42
Как выяснить взаимное расположение двух прямых на плоскости?	43
Как с помощью нормированного уравнения прямой найти расстояние от точки до прямой?	45
Как можно задать плоскость в пространстве?	45
Как выяснить взаимное расположение двух плоскостей?	46
Как с помощью нормированного уравнения плоскости найти расстояние от точки до плоскости?	47
Как можно задать прямую линию в пространстве?	47
Как выяснить взаимное расположение двух прямых в пространстве?	48

Как выяснить взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?	49
Что называют стандартным упрощением уравнения линии второго порядка?	50
Какие линии второго порядка называют центральными?	50
Какие центральные линии второго порядка относятся к эллиптическому типу, а какие — к гиперболическому?	51
Какая линия называется эллипсом и каковы его основные свойства?	51
Какая линия называется гиперболой и каковы ее основные свойства?	52
Какая линия второго порядка относится к нецентральной и каковы ее основные свойства?	53
Каковы основные типы поверхностей второго порядка?	54

Глава 7. Предел последовательности..... 57

Что называют числовыми последовательностями и какие арифметические операции допустимы над ними?	57
Какие последовательности называют ограниченными?	57
Какие последовательности называют бесконечно большими?	58
Какие последовательности называют бесконечно малыми?	58
Какими основными свойствами обладают бесконечно малые последовательности?	59
Какие последовательности называют сходящимися?	59
Какими основными свойствами обладают сходящиеся последовательности?	60
Какие последовательности называют монотонными и каким основным свойством они обладают?	61
Как определяется число e ?	61
Что называют предельной точкой последовательности?	62
В чем состоит утверждение теоремы Больцано—Вейерштрасса?	62
Какие множества называют замкнутыми?	63
Что называют верхним и нижним пределами последовательности?	63

В чем состоит критерий Коши сходимости последовательности?	63
--	----

Глава 8. Функция и ее предел 64

Что называется пределом функции в точке?	64
Что называется односторонним пределом функции в точке? ..	65
Как определяется предел функции при $x \rightarrow \infty$?	66
В чем состоит критерий Коши существования предела функции?	67
Какими арифметическими свойствами обладают функции, имеющие предел?	67
Каким образом сравнивают две бесконечно малые и две бесконечно большие функции в данной точке?	68

Глава 9. Непрерывность функции..... 70

Какая функция называется непрерывной в точке?	70
Что значит, что функция непрерывна на множестве X ?	70
Какие свойства непрерывных функций называют локальными?	71
Какие утверждения характеризуют свойство непрерывной функции принимать любое промежуточное значение?	72
Какие функции называют монотонными и каковы их основные свойства?	73
Что такое сложная функция и какие условия обеспечивают ее непрерывность?	75
Какие функции относятся к простейшим элементарным, как они определяются и каковы их основные свойства?	75
Какой предел называют первым замечательным?	81
Какой предел называют вторым замечательным?	81
Как классифицируются точки разрыва функции?	82
Какие свойства непрерывных функций относятся к ее глобальным свойствам?	83

Глава 10. Основы дифференциального исчисления 85

Что называется производной функции в точке?	85
Каковы физический и геометрический смыслы производной?	85

Что называют правой и левой производными в точке?	86
Какую функцию называют дифференцируемой в точке?	87
Какая связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке?	87
Что называется дифференциалом функции в точке?	87
Как найти производную сложной функции в точке?	88
В чем суть свойства инвариантности формы первого дифференциала?	88
Как найти производную обратной функции?	89
Каковы правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций?	89
Как найти производные простейших элементарных функций?	89
Как найти производную степенно-показательной функции?	92
Что называется n -й производной функции?	92
Как можно найти n -е производные некоторых простейших элементарных функций?	93
Какое правило носит название формулы Лейбница?	93
Как определяются второй дифференциал и другие дифференциалы высших порядков?	94
Обладают ли дифференциалы высших порядков свойством инвариантности формы?	94

Глава 11. Теоремы о дифференцируемых функциях 95

Что означает возрастание или убывание в точке и какие условия обеспечивают такое свойство функции?	95
Что означает наличие у функции локального экстремума в точке и какое условие необходимо для этого свойства?	95
В чем состоит теорема Ролля и каков ее геометрический смысл?	96
В чем состоит теорема Лагранжа и каков ее геометрический смысл?	96
Каковы основные следствия теоремы Лагранжа?	97
В чем состоит теорема Коши?	97
Что называют неопределенностью типа $\frac{0}{0}$ или типа $\frac{\infty}{\infty}$?	98

В чем состоит правило Лопиталя?	99
Какое соотношение называют формулой Тейлора?.....	99
Каковы основные разложения по формуле Маклорена?	101
Какие условия достаточны для наличия экстремума в данной точке?	102
Что называется краевым экстремумом и как его найти?	103
Как определяется направление выпуклости графика функции и что такое точка перегиба?.....	103
Как выяснить направление выпуклости графика функции и найти его точки перегиба?.....	104
Что называют асимптотами графика функции и как их найти?	105
Глава 12. Неопределенный интеграл	106
Что называют первообразной функцией?	106
Что называют неопределенным интегралом функции?.....	106
Какими основными свойствами обладает неопределенный интеграл?	106
Как выполнить замену переменной в неопределенном интеграле?	108
В чем состоит метод интегрирования по частям?.....	108
В чем состоит основной метод интегрирования рациональных дробей?	108
Какие другие классы функций можно проинтегрировать в элементарных функциях?	110
Глава 13. Определенный интеграл.....	112
Что называется определенным интегралом функции?	112
Какое необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла можно сформулировать с помощью верхних и нижних сумм?.....	113
Каковы основные классы интегрируемых функций?	114
Какими свойствами обладает определенный интеграл?.....	114
В чем состоит формула Ньютона—Лейбница?	116
Что называется площадью плоской фигуры?	117
Как используется определенный интеграл для нахождения площади плоской фигуры?.....	117

Как используется определенный интеграл для нахождения объема тела вращения?.....	118
Как используется определенный интеграл для нахождения длины спрямляемой кривой?	119
Какие методы применяются для приближенного вычисления определенных интегралов?.....	120
Что называют несобственным интегралом?	122
Глава 14. Криволинейные интегралы	124
Что называется криволинейным интегралом первого рода?.....	124
Что называется криволинейным интегралом второго рода?	125
Как свести криволинейные интегралы к определенным интегралам?	126
В каком случае криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и как его при этом можно вычислить?	127
Глава 15. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	128
Что такое m -мерное евклидово пространство?.....	128
Какие основные типы множеств рассматриваются в m -мерном евклидовом пространстве?.....	128
Как определяется предел последовательности точек евклидова пространства?.....	130
Как формулируется критерий Коши сходимости последовательности точек в R^m ?.....	130
Как формулируется теорема Больцано—Вейерштрасса в R^m ?	131
Как определяется предел функции m переменных?	131
Какие функции m переменных называются непрерывными?	132
Какая существует связь между непрерывностью функции m переменных по каждой своей переменной и обычной непрерывностью этой функции?	133
Какими основными свойствами обладают непрерывные функции нескольких переменных?	134

Что называется частной производной функции?	135
Какую функцию нескольких переменных называют дифференцируемой?	136
В чем состоит геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных?	137
Какие условия достаточны для дифференцируемости функции нескольких переменных?	138
В чем состоит правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных?	138
Что называют дифференциалом функции нескольких переменных и обладает ли он свойством инвариантности своей формы?	139
Что называется производной по направлению и как ее найти с помощью градиента функции?	140
Как определяются частные производные высших порядков?	141
Какие условия обеспечивают независимость значения смешанных частных производных от порядка выполнения дифференцирования?	142
Как определяются дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных?	143
Какой вид имеет формула Тейлора для функции нескольких переменных?	144
Что называют локальным экстремумом функции нескольких переменных и какое условие для него необходимо?	145
Какие условия обеспечивают локальный экстремум в стационарной точке функции нескольких переменных?	146
Как найти максимальное и минимальное значение функции нескольких переменных?	148
Что называют условным экстремумом функции?	149
Как найти условный экстремум функции?	149
Глава 16. Двойные и тройные интегралы.....	151
Как определяется двойной интеграл от функции двух переменных?	151
Для каких функций двух переменных существует двойной интеграл?	153

Какими основными свойствами обладает двойной интеграл?.....	154
Как свести двойной интеграл к повторному однократному?.....	155
Как выполнить замену переменных в двойном интеграле?	156
Как строится теория тройных интегралов?	157

Глава 17. Ряды..... 159

Что называют числовым рядом и как определяется его сумма?.....	159
В чем состоит критерий Коши сходимости числового ряда и каковы его следствия?	159
В чем состоит специфика изучения числовых рядов с неотрицательными членами?	160
Каковы основные признаки сравнения числовых рядов с неотрицательными членами?	161
В чем состоят признаки Даламбера и Коши сходимости/расходимости числового ряда?	161
Что понимается под абсолютной и условной сходимостью числового ряда?	162
Что такое степенной ряд и что называют его радиусом сходимости?.....	163
Какими свойствами обладает сумма степенного ряда на промежутке сходимости?	164
Как разложить функцию в степенной ряд?	165