

## Точное аналитическое решение для поля скорости сдвигового течения Куэтта — Пуазейля — Бенара

© С.А. Берестова, Е.Ю. Просвиряков

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,  
Екатеринбург, Свердловская область, 620062, Российская Федерация

*Представлено аналитическое частное решение уравнений Навье — Стокса для описания стационарной конвекции Бенара течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном горизонтальном слое. Исследовано поле скорости при движении вертикального вихревого потока. Крупномасштабный поток жидкости рассматривается в приближении тонкого слоя с недеформируемыми границами. Учитываются две горизонтальные компоненты вектора скорости. Сдвиговое течение возникает при нагреве/охлаждении нижней границы и наличии градиента давления на верхней. Температура и давление взяты в виде линейных форм. Коэффициенты линейных форм зависят от вертикальной (поперечной) координаты. Заранее неизвестные функции — многочлены, описывающие поле скоростей, точно найдены из системы шестого порядка обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы спектральные свойства полиномов в области определения решения. Анализ распределения нулей полиномов, задающих поле скорости, позволил проиллюстрировать стратификацию слоев жидкости. Представлено подробное исследование существования устойчивых обратных течений в конвективном потоке жидкости типа Куэтта — Пуазейля — Бенара.*

**Ключевые слова:** неоднородный поток, конвекция, точное решение, вертикальное завихрение, противотечение, застойная зона

**Введение.** Нахождение точных решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости является актуальной проблемой [1–4]. Аналитическое интегрирование уравнений Навье — Стокса было начато в конце XIX столетия. Течение Куэтта, течение Пуазейля, решение задач Стокса, течение Экмана стали классическими результатами, которые описываются аналитически [1–4]. Первый обзор по точным решениям, где был сделан акцент на геометрии линий тока для установившихся и нестационарных течений, был предложен Неменьи [5]. Можно констатировать, что в том обзоре используются идеи точного интегрирования уравнений движения, предложенные Громеком, Тркалом и Бельтрами [6, 7]. Дальнейшее развитие идей построения точных решений уравнений Навье — Стокса привело к формулированию класса точных решений Линя — Сидорова — Аристова [8–11].

Предложенный Линем анзац для поля скоростей [8] был независимо использован Сидоровым и Аристовым при интегрировании уравнений Обербека — Буссинеска [9, 10]. Отметим, что первое точное решение уравнений естественной конвекции было получено представителями пермской гидродинамической школы Остроумовым

и Бирихом для описания однонаправленных движений жидкости с осевой и плоской симметрией бесконечного слоя жидкости [12–16]. Точное решение Остроумова — Бириха было применено Шлиомисом при решении задач испарительной конвекции [17, 18]. С учетом современных потребностей микроэлектроники, микро- и нанофлюидики необходимо рассмотреть не только возможность использования однонаправленных течений для исследования их гидродинамической устойчивости, но и применение сдвиговых течений для решения точно интегрируемых задач конвекции [19].

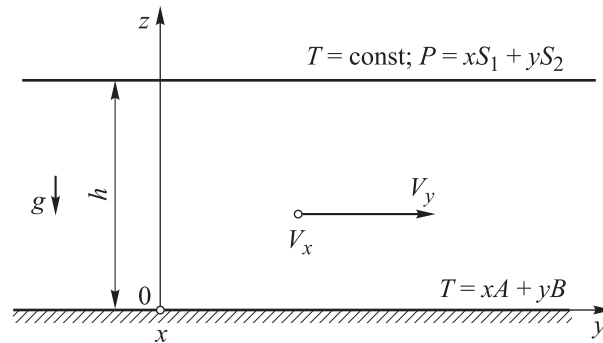
В статье [20] было исследовано влияние термокапиллярного механизма на конвективное перемешивание жидкости и показано влияние ограниченных условий и диссипативных коэффициентов жидкости на существование двумерного поля скорости, т. е. было продемонстрировано, что в рамках класса Линя — Сидорова — Аристова можно описывать неоднородные по скорости течения, обобщающие семейство Остроумова — Бириха — Шлиомиса. В цикле работ [21, 22] рассмотрены краевые и начально-краевые задачи для конвекции Марангони сдвиговых однородных и неоднородных течений. Было показано, что структура гидродинамических полей сопровождается стратификацией, а это приводит к регистрации противотечений в жидкости. Интерес к конвекции Марангони обусловлен классическими опытами Бенара, который исследовал течения спермацета со свободной границей. В этих опытах конвекция индуцировалась двумя механизмами: гравитационным переносом конвекции Бенара (неоднородность силового поля Архимеда) и поверхностным эффектом Марангони. Интенсивно изучаются противотечения в жидкости в источниках [20, 23, 24].

Цель данной статьи — изучение гравитационной конвекции Бенара с учетом кинематических граничных условий Куэтта в бесконечном горизонтальном слое жидкости. Приводятся точное решение и анализ гидродинамических полей для простейшего сдвигового течения типа Бенара — Куэтта.

**Постановка задачи.** Рассмотрим гравитационное сдвиговое течение теплопроводящей жидкости между двумя плоскостями, когда на нижней неподвижной границе происходит подогрев или охлаждение, а на верхней границе — изменение давления (рис. 1). При этом под вязким несжимаемым крупномасштабным течением будем понимать течение жидкости с показателями геометрической анизотропии:

$$\delta \leq 0,1, \quad a = \frac{B}{A} h, \quad b = \frac{S_2}{S_1} h,$$

где  $\delta \leq h/l$ ,  $h$  и  $l$  — характерный масштаб течения по вертикали (толщина слоя) и горизонтали соответственно;  $A$  и  $B$  — горизонтальные градиенты температуры жидкости на нижней границе;  $S_1$  и  $S_2$  — горизонтальные градиенты давления на верхней границе.



**Рис. 1.** Схема движения жидкости между двумя плоскостями:

$T$  — отклонение от средней температуры;  $A$  и  $B$  — горизонтальные градиенты температуры жидкости на нижней границе слоя высотой  $h$ ;  $P$  — отклонение давления от гидростатического, поделенное на постоянную среднюю плотность жидкости  $\rho$ ;  $S_1$  и  $S_2$  — горизонтальные градиенты давления на верхней границе;  $g$  — ускорение свободного падения

Уравнения движения вязкой жидкости Навье — Стокса в случае стационарного гравитационного течения [25] имеют вид

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \nu \Delta \vec{V} + g\beta T \vec{k},$$

где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор Гамильтона;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты

прямоугольной декартовой системы координат;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  —

оператор Лапласа;  $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$  — вектор скорости;  $P$  — отклонение давления от гидростатического, поделенное на постоянную среднюю плотность жидкости  $\rho$ ;  $\nu$  — коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости;  $T$  — отклонение от средней температуры;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения жидкости.

Вызывает интерес рассмотрение взаимного влияния полей температуры и скорости вследствие теплового и механического взаимодействий. Пренебрегая диссипацией энергии, теплообмен в слое жидкости задается уравнением теплопроводности

$$\vec{V} \cdot \nabla = \chi \Delta T,$$

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности жидкости.