УДК 532.592; 517.958

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: teshukov@hydro.nsc.ru

Классические уравнения теории мелкой воды, описывающие распространение длинных волн на потоке без сдвига скорости по вертикали, совпадают с уравнениями, описывающими изоэнтропическое движение политропного газа при показателе политропы $\gamma = 2$ (в теории волновых движений жидкости этот факт называют газодинамической аналогией). Выведена новая математическая модель теории длинных волн, описывающая сдвиговые течения жидкости со свободной границей. Показано, что в случае одномерного движения уравнения новой модели совпадают с уравнениями, описывающими неизоэнтропические движения газа при специальном выборе уравнения состояния, а в многомерном случае новая система уравнений длинных волн существенно отличается от модели движения газа. В общем случае установлено, что полученная система уравнений является системой гиперболического типа. Найдены скорости распространения волновых возмущений.

Ключевые слова: длинноволновое приближение, сдвиговое течение, свободная граница, мелкая вода, газодинамическая аналогия.

1. Осреднение уравнений длинных волн. Движение идеальной несжимаемой жидкости в слое со свободной границей описывается уравнениями Эйлера

$$\rho\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \qquad \rho\,\frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho g, \qquad \operatorname{div}_2 \boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla_2 + u_3\,\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

На свободной границе $x_3 = h(t, x_1, x_2)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия

$$h_t + (\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla_2)h = u_3, \qquad p = p_0 = \text{const}, \tag{1.2}$$

на ровном дне $x_3 = 0$ — условие непротекания

$$u_3 = 0. \tag{1.3}$$

В (1.1)–(1.3) t — время; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости; x_3 — вертикальная координата; $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ — горизонтальная скорость; u_3 — вертикальная компонента скорости жидкости; ρ — плотность; $h(t, x_1, x_2)$ — глубина; p — давление; g — ускорение свободного падения; ∇_2, div_2 — градиент и дивергенция, вычисленные по векторной переменной $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00253).

ŋqdbyэʏ bƎ dәdƎbYзe d ɘɔɑbɔʏ ɟqdbYqʎә

Введем безразмерные переменные

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad x_3' = \frac{x_3}{H}, \quad t' = \frac{Ut}{L}, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{U},$$

$$u_3' = \frac{Lu_3}{UH}, \quad h' = \frac{h}{H}, \quad p' = \frac{p}{RU^2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{R}.$$

В этих переменных уравнения Эйлера (1.1) имеют вид

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \qquad \varepsilon^2 \rho \frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho \,\mathrm{Fr}^{-2}, \qquad \mathrm{div}_2\, \boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0 \tag{1.4}$$

(штрихи в обозначениях новых безразмерных переменных опущены; $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gH}$ — число Фруда; $\varepsilon = H/L$). Исключив давление p из системы уравнений (1.4), получим уравнение Гельмгольца, описывающее эволюцию безразмерного вихря $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3}, u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1}, u_{2x_1} - u_{1x_2})$:

$$\boldsymbol{\omega}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_2)\boldsymbol{\omega} + u_3 \boldsymbol{\omega}_{x_3} = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3})\boldsymbol{U}_{x_1} + \\ + (u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1})\boldsymbol{U}_{x_2} + (u_{2x_1} - u_{1x_2})\boldsymbol{U}_{x_3} \tag{1.5}$$

($\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)$). Проецируя уравнение Гельмгольца (1.5) на оси x_1, x_2, получаем уравнения с малой правой частью порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} (u_{1x_3})_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_2)u_{1x_3} + u_3(u_{1x_3})_{x_3} + u_{1x_2}u_{2x_3} - u_{2x_2}u_{1x_3} = O(\varepsilon^2), \\ (u_{2x_3})_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_2)u_{2x_3} + u_3(u_{2x_3})_{x_3} + u_{2x_1}u_{1x_3} - u_{1x_1}u_{2x_3} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{1.6}$$

При выводе модели теории длинных волн членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (1.6) можно пренебречь. Тогда уравнение для вертикальной компоненты импульса сводится к гидростатическому закону распределения давления по глубине:

$$p_{x_3} = -\rho \,\mathrm{Fr}^{-2}, \qquad p - p_0 = \rho \,\mathrm{Fr}^{-2}(h - x_3).$$

Используя это представление, получаем приближенные уравнения модели длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \mathrm{Fr}^{-2}\, \nabla_2 h = 0, \qquad \mathrm{div}_2\, \boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0, \qquad h_t + (\boldsymbol{u}^h \cdot \nabla_3)h = u_3^h. \tag{1.7}$$

Здесь $\boldsymbol{u}^h$, u_3^h — значения компонент вектора скорости на свободной границе $x_3 = h(t, x_1, x_2)$. На дне $x_3 = 0$ решение системы (1.7) должно удовлетворять условию (1.3).

Решения системы (1.4), удовлетворяющие условию $S = (u_{1x_3})^2 + (u_{2x_3})^2 \neq 0$, будем называть течениями со сдвигом скорости по вертикали, или сдвиговыми течениями. Соответственно в течении без сдвига скорости $u_{1x_3} = u_{2x_3} = 0$. Модель (1.7) сводится к системе интегродифференциальных уравнений, к которой применима теория обобщенных характеристик (см. [1, 2]), что позволяет изучить общие свойства длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении. Ниже будут получены более простые модели, в которых сдвиговый характер течения учитывается за счет введения некоторых средних характеристик сдвига скорости по вертикали.

В классе течений с достаточно малой величиной S, осредняя по глубине уравнения (1.7), можно получить классические уравнения теории мелкой воды. Интегрируя (1.7) по x_3 от 0 до h и учитывая граничные условия, получаем

$$\Bigl(\int_0^h \boldsymbol{u}\, dx_3\Bigr)_t + \mathrm{div}\Bigl(\int_0^h (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})\, dx_3\Bigr) + \frac{\mathrm{Fr}^{-2}}{2}\nabla_2(h^2) = 0, \tag{1.8}$$

$$h_t + \operatorname{div}\Big(\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dx_3\Big) = 0,$$

где $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$ — диада векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Вводя осредненную по глубине горизонтальную скорость

$$\bar{\boldsymbol{u}} = h^{-1}\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dx_3,$$

интеграл от вектора $\boldsymbol{u}$ по глубине, входящий в уравнения (1.8), можно заменить выражением $h\bar{\boldsymbol{u}}$. Однако интегралы от квадратичных по скорости выражений, входящие в уравнения (1.8), не выражаются через осредненную скорость в общем сдвиговом течении. В гидравлике для этих интегралов используются эмпирические формулы вида [3]

$$\int\limits_0^h (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\,dx_3 = \alpha h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}),$$

где α — эмпирический поправочный коэффициент. Отметим, что использование этого соотношения приводит к потере инвариантности получаемой системы уравнений относительно преобразования Галилея, несмотря на то что система (1.8) такое преобразование допускает.

В работе [4] в одномерном случае система уравнений (1.8) замыкалась другим эмпирическим соотношением:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^h (u-\bar{u})^2\,dx_3 = gH\,\frac{\partial h}{\partial x_1}$$

(H — некоторая константа). Однако обоснование этого соотношения не приведено.

Ниже получена модель, в среднем приближенно учитывающая сдвиговый характер течения. При этом эмпирические формулы не привлекаются. Используя очевидное тождество $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$, вычисляем тензор $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ в виде

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{u}}\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes\bar{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}).$$

При интегрировании этого выражения от 0 до h линейные по $(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ члены дают нулевой вклад. В результате получаем представление

$$\int\limits_0^h (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\,dx_3 = h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}) + P,$$

где

$$P = \int\limits_0^h (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\,dx_3.$$

Используя тензор P, уравнения (1.8) можно записать в виде

$$\begin{gathered} h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \\ (h\bar{\boldsymbol{u}})_t + \operatorname{div}_2(h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}) + P) + (1/2)\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\nabla_2(h^2) = 0. \end{gathered} \qquad (1.9)$$