

УДК 339.543  
ББК 65в6  
А67

*Д о п у щ е н н о*  
*научно-техническим советом Российской таможенной академии*  
*в качестве учебника для аспирантов, обучающихся по программе*  
*дополнительного профессионального образования*  
*«Преподаватель высшей школы»*

**Рецензенты:**

С.В. БАРАМЗИН, доктор экономических наук, профессор (Российская таможенная академия);

В.В. КАПИТОНЕНКО, доктор экономических наук, профессор (Государственный университет управления);

А.М. НИКОНОВ, доктор экономических наук, профессор (Военная академия Генерального штаба Вооруженных Сил РФ)

**Анисимов В.Г.** Применение математических методов при проведении диссертационных исследований: учебник / В.Г. Анисимов, Е.Г. Анисимов, Н.Г. Липатова, А.Я. Черныш. М.: Изд-во Российской таможенной академии, 2011. 514 с.

**ISBN 978-5-9590-0269-5**

Учебник содержит описание современных математических методов, применяемых при исследованиях в области экономики и юриспруденции. Он разработан в соответствии с программой дисциплины «Применение математических методов при проведении диссертационных исследований», преподаваемой аспирантам Российской таможенной академии, обучающимся по программе дополнительного профессионального образования «Преподаватель высшей школы».

Предназначен для самостоятельной работы аспирантов. Материалы учебника также могут быть полезными студентам, аспирантам и преподавателям Российской таможенной академии, занимающимся вопросами моделирования в сфере экономики и юриспруденции.

© Анисимов В.Г., 2011

© Анисимов Е.Г., 2011

© Липатова Н.Г., 2011

© Черныш А.Я., 2011

© Российская таможенная академия, 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	11
<b>Глава 1. ПОДХОДЫ К ВЫБОРУ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В СФЕРЕ ЭКОНОМИКИ И ЮРИСПРУДЕНЦИИ .....</b>	<b>14</b>
1.1. Методологические проблемы применения математических методов в экономике и юриспруденции .....	14
1.2. Основные типы математических моделей, применяемых в экономических и юридических науках .....	21
1.3. Сущность и условия применимости теоретико-вероятностных (стохастических) методов в экономике и юриспруденции .....	23
1.4. Общая характеристика оптимизационных моделей и методов, применяемых в экономике и юриспруденции .....	26
<b>Глава 2. ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ В ЭКОНОМИКЕ .....</b>	<b>30</b>
2.1. Место понятия «эффективность» в системе понятий, отражающих качество экономических процессов .....	30
2.2. Сущность понятия «эффективность» .....	34
2.3. Шкалы для измерения эффективности .....	36
2.3.1. Шкала наименований .....	37
2.3.2. Порядковые шкалы .....	38

2.3.3. Интервальные шкалы .....	39
2.3.4. Шкалы отношений .....	40
2.3.5. Абсолютная шкала .....	41
2.4. Формирование структуры показателей эффективности на примере управления инвестициями .....	42
 Г л а в а 3. ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ .....	47
3.1. Предмет и основные этапы развития теории вероятностей .....	47
3.2. Основные понятия теории вероятностей .....	50
3.3. Алгебра событий .....	54
3.4. Классическое определение вероятности .....	58
3.5. Геометрическое определение вероятности .....	64
3.6. Статистическое определение вероятности .....	67
3.7. Аксиоматическое определение вероятности .....	69
3.8. Основные теоремы теории вероятностей .....	71
3.8.1. Теорема сложения вероятностей .....	71
3.8.2. Теорема умножения вероятностей .....	73
3.8.3. Теорема сложения вероятностей для случая совместных событий .....	74
3.8.4. Формула полной вероятности .....	75
3.8.5. Теорема гипотез (формула Байеса) .....	77
3.9. Случайные величины и формализация законов их распределения .....	78
3.10. Числовые характеристики случайных величин .....	87
3.11. Типовые законы распределения случайных величин .....	96
3.12. Системы случайных величин .....	104
3.12.1. Распределение системы случайных величин .....	104

3.12.2. Числовые характеристики системы случайных величин.....	109
3.12.3. Нормальное распределение на плоскости.....	111
3.13. Общие свойства случайных величин с произвольным законом распределения .....	113
<b>Глава 4. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....</b>	<b>119</b>
4.1. Основные понятия. Классификация случайных процессов.....	119
4.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова) .....	126
4.2.1. Свойства и классификация цепей Маркова.....	126
4.2.2. Поглощающие цепи Маркова .....	133
4.2.3. Эргодические цепи Маркова.....	138
4.2.4. Исследование марковских цепей общего вида.....	144
4.3. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывные цепи Маркова) .....	149
4.3.1. Структура и основные характеристики непрерывных цепей .....	149
4.3.2. Дифференциальные уравнения Колмогорова .....	153
4.3.3. Методы исследования конечных непрерывных цепей Маркова .....	159
4.4. Системы массового обслуживания.....	178
4.4.1. Общая характеристика систем массового обслуживания.....	178
4.4.2. Математические модели однофазных систем массового обслуживания и показатели их эффективности .....	184

Глава 5. КЛАССИЧЕСКИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ .....	195
5.1. Сущность и базовая модель эконометрики.....	195
5.2. Специфика эконометрических данных .....	200
5.3. Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов .....	202
5.4. Построение эконометрических моделей на основе регрессионного и корреляционного анализа .....	205
5.4.1. Сущность регрессионного и корреляционного анализа.....	205
5.4.2. Линейная однофакторная регрессия .....	209
5.4.3. Нелинейные уравнения однофакторной регрессии .....	214
Глава 6. ОСНОВЫ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.....	216
6.1. Общая характеристика временных рядов и задача их исследования .....	217
6.2. Схема эконометрического анализа временного ряда.....	220
6.3. Статистические характеристики временного ряда .....	224
6.4. Процедуры тестирования временных рядов на стационарность.....	229
6.4.1. Параметрические тесты стационарности.....	229
6.4.2. Непараметрические тесты стационарности .....	237
6.5. Структурная и параметрическая идентификация моделей стационарных временных рядов.....	242
6.5.1. Модель авторегрессии первого порядка (марковский процесс) .....	244
6.5.2. Модели авторегрессии второго порядка .....	246
6.5.3. Модели авторегрессии $p$ -го порядка .....	248
6.5.4. Модели скользящего среднего .....	249

Глава 7. ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ В ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ.....	256
7.1. Введение в проблему оптимизации.....	256
7.2. Модели и методы нелинейного программирования .....	261
7.2.1. Основные понятия и определения .....	261
7.2.2. Задача безусловной оптимизации .....	265
7.2.3. Задача оптимизации при условии положительности значений переменных.....	267
7.2.4. Задача условной оптимизации при ограничениях типа равенств. Метод множителей Лагранжа .....	269
7.2.5. Обобщение метода множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера .....	271
7.2.6. Поисковые методы в задачах оптимизации.....	277
7.3. Модели и методы линейного программирования .....	280
7.3.1. Сущность задач линейного программирования. Основная задача линейного программирования.....	280
7.3.2. Геометрический метод решения задач линейного программирования .....	288
7.3.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования .....	291
7.3.4. Двойственная модель линейного программирования.....	297
7.4. Транспортная задача линейного программирования .....	301
7.4.1. Постановка задачи .....	301
7.4.2. Способы составления допустимого опорного решения транспортной задачи .....	304
7.4.3. Распределительный метод решения транспортной задачи.....	307
7.4.4. Метод потенциалов.....	312

7.4.5. Венгерский метод .....	314
7.5. Модели и методы дискретного программирования .....	320
7.5.1. Типовые модели задач дискретного программирования.....	320
7.5.2. Общая характеристика методов решения задач дискретного программирования.....	344
7.5.3. Метод динамического программирования .....	357
7.5.4. Применение свойства двойственности для повышения эффективности метода динамического программирования .....	365
7.5.5. Метод ветвей и границ .....	372
7.5.6. Применение двойственности для повышения эффективности метода ветвей и границ .....	387
7.5.7. Комбинированный метод решения задач дискретного программирования.....	396
7.5.8. Метод решения сепарабельных задач целочисленного программирования с нелинейной целевой функцией.....	402

Глава 8. ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР В ДИССЕРТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ .....	409
8.1. Сущность и классификация игровых моделей.....	409
8.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях .....	411
8.3. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.....	415
8.4. Порядок построения и решения матричных игровых моделей .....	418
8.5. Графический метод решения матричных игр.....	424
8.6. Сведение игровой модели к задаче линейного программирования .....	428
8.7. Элементы теории игр с природой.....	433

8.8.	Бесконечные антагонистические игры.....	435
8.8.1.	Понятие и основные теоремы бесконечных антагонистических игр.....	435
8.8.2.	Бесконечные антагонистические игры с выпуклой целевой функцией .....	440
Г л а в а 9.	МОДЕЛИ И МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ .....	446
9.1.	Структурное моделирование проекта .....	448
9.2.	Календарное планирование.....	454
9.2.1.	Основные параметры календарного плана.....	454
9.2.2.	Методы определения параметров календарного плана .....	460
9.3.	Задачи управления проектом с использованием моделей ресурсно-временной оптимизации на сетях.....	464
9.4.	Сетевые модели и алгоритмы построения оптимальных календарных планов реализации проектов, использующих один тип ресурса .....	466
9.4.1.	Математическая формализация моделей оптимизации календарных планов.....	466
9.4.2.	Алгоритм минимизации времени выполнения комплекса работ проекта.....	471
9.4.3.	Алгоритм минимизации уровня потребления ресурса.....	488
9.5.	Сетевая модель минимизации времени выполнения комплекса работ при ограничениях на количество и взаимозаменяемость исполнителей .....	492
9.5.1.	Математическая формализация модели.....	492
9.5.2.	Описание метода оптимизации календарного плана .....	494



9.6. Сетевая модель и алгоритм минимизации времени выполнения комплекса работ с учетом производительности исполнителей.....	499
9.6.1. Математическая формализация модели.....	499
9.6.2. Алгоритм минимизации времени выполнения комплекса работ с учетом производительности исполнителей.....	502
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	508
ЛИТЕРАТУРА .....	509