

*Н.Е. МОЛЕВИЧ*

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

**2007**



**САМАРА**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

*Н. Е. МОЛЕВИЧ*

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2007

УДК 537.86  
ББК 22.33



**Инновационная образовательная программа  
"Развитие центра компетенции и подготовка  
специалистов мирового уровня в области  
аэрокосмических и геоинформационных  
технологий"**

Рецензенты: канд. ф.-м. наук, доц. А. П. З а и к и н  
канд. техн. наук, доц. М. П. Ш л ы к о в а

**Молевич Н.Е.**

**Нелинейная динамика:** учеб. пособие / Н. Е. Молевич. –  
Самара: Изд - во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 160 с. : ил.

**ISBN 978-5-7883-0488-5**

Представлено систематическое изложение основных разделов нелинейной динамики. Первая глава представляет собой элементарное введение в теорию динамических систем. Вторая глава подробно знакомит с качественными методами исследования поведения динамических систем в фазовом пространстве. В третьей главе излагаются основные понятия и методы, применяемые для исследования устойчивости динамических систем. Четвёртая глава посвящена теории бифуркаций с коразмерностью 1. Рассматриваются как непрерывные динамические системы (точечные и распределённые), так и дискретные отображения последования. Основное содержание пособия дополнено примерами решения задач. Предназначено для студентов обучающихся по направлениям "Прикладная математика и физика", "Физика" и др. Издание подготовлено на кафедре физики Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 537.86  
ББК 22.33

**ISBN 978-5-7883-0488-5**

© Молевич Н.Е., 2007  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
1 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ .....	7
1.1 Динамическая система и её математическая модель.....	7
1.2 Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений. Динамические переменные. Фазовая точка, фазовая траектория, фазовое пространство. Число степеней свободы.....	9
1.3 Классификация динамических систем: дифференциальные и дискретные системы, линейные и нелинейные, автономные и неавтономные, с конечным и бесконечным числом степеней свободы.....	10
1.4 Одномерный фазовый портрет.....	12
2 КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ.....	16
2.1 Матричная форма линейной динамической системы. Собственные значения и вектора матрицы коэффициентов. Характеристическое уравнение.....	16
2.2 Каноническая двумерная линейная система.....	19
2.3 Фазовые портреты для простых канонических систем на плоскости.....	23
2.4 Фазовые портреты простых линейных систем на плоскости.....	30
2.5 Классификация линейных систем.....	33
2.6 Непростые канонические системы.....	35
2.7 Классификация типов простых особых точек в многомерном пространстве.....	36
2.8 Локальное и глобальное поведение нелинейных систем на плоскости. Теорема о линеаризации. Простые особые точки нелинейных систем. Грубые (гиперболические) точки.....	40
2.9 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью нуль - изоклин нелинейной системы.....	47
2.10 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью метода изоклин.....	49
2.11 Предельные циклы.....	51
2.12 Теоремы Пуанкаре-Бендиксона.....	54
2.13 Точечные отображения. Метод отображений Пуанкаре. Функция последования.....	56

3	УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	58
3.1	Классификация предельных множеств динамических систем .....	58
3.2	Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость, орбитальная устойчивость, устойчивость по Пуассону и Лангранжу.....	59
3.3	Линейная теория устойчивости состояний равновесия.....	63
3.4	Критерий Рауса-Гурвица.....	64
3.5	Метод D – разбиений.....	66
3.6	Линейный анализ устойчивости по Ляпунову фазовых траекторий. Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы.....	69
3.6.1	Устойчивость состояний равновесия.....	73
3.6.2	Устойчивость периодических решений. Матрица монодромии. Мультипликаторы предельного цикла.....	74
3.6.3	Устойчивость квазипериодических решений.....	76
3.6.4	Устойчивость хаотических решений.....	76
3.6.5	Понятие о динамическом хаосе.....	77
3.6.6	Типы аттракторов.....	78
3.7	Монотонные отображения. Устойчивость неподвижных точек и циклов одномерных дискретных динамических систем.....	80
3.8	Второй (прямой) метод Ляпунова. Функция Ляпунова.....	84
4	БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	89
4.1	Структурная устойчивость, грубость системы. Бифуркационные значения параметров. Локальные и нелокальные, мягкие (внутренние) и жёсткие (кризисы) бифуркации. Бифуркационная и фазопараметрическая диаграммы.....	89
4.2	Бифуркации положения равновесия.....	95
4.2.1	Бифуркация седло-узел.....	95
4.2.2	Бифуркация «обмен устойчивостью» (транскритическая).....	97
4.2.3	Суперкритическая и субкритическая бифуркации типа вилки.....	97
4.3	Бифуркация рождения (уничтожения) предельного цикла Андропова-Хопфа.....	99
4.4	Основные типы бифуркаций периодических решений	105
4.4.1	Бифуркация рождения - исчезновения двух предельных циклов (седло-узловая бифуркация предельных циклов).....	107
4.4.2	Бифуркация удвоения периода цикла.....	107
4.4.3	Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора.....	110
4.4.4	Бифуркация предельного цикла типа вилки.....	111
4.5	Нелокальные бифуркации.....	112
4.5.1	Бифуркация образования петли сепаратрисы седла и седла-фокуса. Гомо- и гетероклинические траектории. Седловые величины. Теорема Шильникова.....	113

Учебное издание

*Молевич Нонна Евгеньевна*

## **НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Учебное пособие*

Технический редактор Н. Л. К а з а н с к и й  
Редакторская обработка А. В. Я р о с л а в ц е в а  
Корректорская обработка А. В. Я р о с л а в ц е в а  
Доверстка А. В. Я р о с л а в ц е в а

Подписано в печать 26.09.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 10,0.

Тираж 120 экз. Заказ . ИП-118/2007

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.