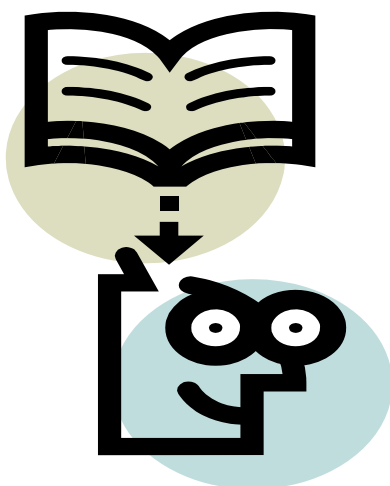


С. А. Черепанова

Математика

Часть II

Дифференциальное и интегральное исчисления



Красноярск 2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный технологический
университет»

Лесосибирский филиал

С. А. Черепанова

Математика

Часть II

Дифференциальное и интегральное исчисления

Утверждено редакционно-издательским советом СибГТУ в качестве
сборника контрольных заданий для студентов специальности 150405.65

«Машины и оборудование лесного комплекса»

заочной формы обучения

Красноярск 2013

УДК 517

Черепанова С. А. Математика. Часть II. Дифференциальное и интегральное исчисления: сборник контрольных заданий для студентов специальности 150405.65 Машины и оборудование лесного комплекса заочной формы обучения / С. А. Черепанова – Красноярск: СибГТУ, 2013. – 78 с.

Рецензенты: доцент, канд. пед. наук С. А. Осяк (Лесосибирский педагогический институт – филиал СФУ), доцент Н. Г. Черноусова (научно – методический совет СибГТУ).

© С. А. Черепанова, 2013

© ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный технологический университет», Лесосибирский филиал, 2013

Введение

Согласно рабочим учебным планам специальности 150405.65 заочной формы обучения в первом, втором и третьем семестрах студенты должны выполнить по две контрольных работы, в четвёртом семестре – одну контрольную работу.

Для изучения разделов математики: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ» и выполнения контрольных работ в первом семестре предназначена первая часть сборника контрольных заданий, изданная в 2011 году.

Настоящий сборник контрольных заданий предназначен в помощь студентам специальности 150405.65 заочной формы обучения при изучении математики и выполнении контрольных работ во втором семестре. Сборник контрольных заданий содержит краткий теоретический материал и образцы решения задач по разделам математики: «Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной», «Интегральное исчисление функций двух независимых переменных». Рабочей программой учебной дисциплины «Математика» предусмотрено 6 часов лекционных занятий и 4 часа практических занятий. На самостоятельную работу отводится 162 часа, в том числе для выполнения контрольных работ № 1, № 2 (текущий контроль знаний).

Контрольная работа № 1 «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных».

Контрольная работа № 2 «Интегральное исчисление функций одной и двух переменных».

С целью проверки уровня остаточных знаний студентов по высшей математике в сборник контрольных заданий включена аудиторная

проверочная работа по теме «Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введения в анализ» (предварительный контроль знаний). Проверочная работа выполняется студентами во время сессии, на первом занятии по математике. Результаты проверочной работы позволят преподавателю сделать выводы об уровне знаний основных понятий высшей математики, изученных студентами в первом семестре.

Для проверки уровня знаний, усвоенных студентами во втором семестре, в сборнике предусмотрена аудиторная проверочная работа «Элементы дифференциального и интегрального исчислений» по изученным во втором семестре разделам высшей математики (рубежный контроль знаний). Проверочная работа выполняется студентами во время сессии, на последнем практическом занятии по математике.

В конце второй лабораторно-экзаменационной сессии студенты сдают экзамен.

Задачи сборника контрольных заданий:

- определение содержания, видов и форм контроля знаний и умений студентов по математике во втором семестре;
- указание литературных источников, необходимых для изучения перечисленных разделов курса;
- овладение методами и методиками решения математических задач для выполнения контрольных заданий.

Цели сборника контрольных заданий:

- ✓ управление процессом обучения, на основе оценки эффективности усвоения программного материала, учебной дисциплины и качества знаний студентов;
- ✓ закрепление, углубление и расширение знаний студентов при решении конкретных практических и прикладных задач;

- ✓ развитие познавательных способностей, самостоятельного мышления, творческой активности студентов;
- ✓ повышение общего уровня математической культуры.

1 Общие указания к оформлению контрольных работ

Согласно графику учебного процесса студентов специальности 150405.65 заочной формы обучения во втором семестре предусмотрена летняя лабораторно-экзаменационная сессии. При подготовке к летней лабораторно - экзаменационной сессии каждый студент должен выполнить две контрольные работы (КР), которые содержат основной материал разделов высшей математики, изучаемых во втором семестре. Задания для КР № 1, КР № 2 систематизированы согласно рабочей программе дисциплины для того, чтобы изучаемый материал был взаимосвязан между собой и легче усваивался.

Индивидуальные задания для проверочных и контрольных работ составлены в десяти вариантах и выбираются согласно варианту, номер которого определяется последней цифрой номера зачётной книжки студента. Номера индивидуальных заданий, согласно варианту, представлены в таблицах 1 – 3.

Таблица 1 – Задания для аудиторной проверочной работы «Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введения в анализ»

Перед выполнением заданий контрольных работ № 1, № 2 (таблица 2) студенту необходимо изучить соответствующие разделы курса высшей математики по конспектам лекционных и практических занятий, а также по учебникам и пособиям. Ссылки на учебники и пособия, рекомендованные в библиографическом списке сборника, обозначаются

номерами в квадратных скобках. Например, [5] означает ссылку на учебник Н. С. Пискунова.

Таблица 1– Задания для аудиторной проверочной работы «Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введения в анализ»

№ варианта	Номера заданий
1	1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91
2	2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92
3	3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93
4	4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94
5	5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95
6	6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96
7	7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97
8	8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98
9	9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99
0	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

Таблица 2 – Задания для контрольных работ №1, №2

№ варианта	Номера заданий КР №1	Номера заданий КР №2
1	101, 111, 121, 131, 141, 151	161, 171, 181, 191, 201, 211
2	102, 112, 122, 132, 142, 152	162, 172, 182, 192, 202, 212
3	103, 113, 123, 133, 143, 153	163, 173, 183, 193, 203, 213
4	104, 114, 124, 134, 144, 154	164, 174, 184, 194, 204, 214
5	105, 115, 125, 135, 145, 155	165, 175, 185, 195, 205, 215
6	106, 116, 126, 136, 146, 156	166, 176, 186, 196, 206, 216
7	107, 117, 127, 137, 147, 157	167, 177, 187, 197, 207, 217
8	108, 118, 128, 138, 148, 158	168, 178, 188, 198, 208, 218
9	109, 119, 129, 139, 149, 159	169, 179, 189, 199, 209, 219
0	110, 120, 130, 140, 150, 160	170, 180, 190, 200, 210, 220

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. Образец оформления титульного листа представлен в приложении сборника. В работу должны быть включены все задания индивидуального варианта, в соответствии с его номером. Перед решением конкретной задачи необходимо привести ее условие. Решение задачи должно быть приведено с промежуточными расчётами, необходимыми рисунками и пояснениями.

Требованиями к защите контрольных работ являются умения студента объяснять решение любой задачи и отвечать на теоретические вопросы по содержанию контрольной работы. Требованиями допуска к экзамену являются наличие у студента контрольных работ, прошедших защиту, а также выполнение на положительную оценку аудиторной проверочной работы по теме «Элементы дифференциального и интегрального исчислений».

Таблица 3 – Задания для аудиторной проверочной работы «Элементы дифференциального и интегрального исчислений»

№ варианта	Номера заданий
1	221, 231, 241, 251, 261, 271
2	222, 232, 242, 252, 262, 272
3	223, 233, 243, 253, 263, 273
4	224, 234, 244, 254, 264, 274
5	225, 235, 245, 255, 265, 275
6	226, 236, 246, 256, 266, 276
7	227, 237, 247, 257, 267, 277
8	228, 238, 248, 258, 268, 278
9	229, 239, 249, 259, 269, 279
0	230, 240, 250, 260, 270, 280

2. Аудиторная проверочная работа «Элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и введения в анализ»

Задание №1

1-10. Вычислить определитель матрицы A.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание №2

21-30. Построить график функции $y = ax + b$.

21. $y = 2x + 1$.

22. $y = -2x + 1$.

23. $y = 3x - 1$.

24. $y = 3x + 1$.

25. $y = 4x + 3$.

26. $y = -2x + 4$.

27. $y = 2x - 3$.

28. $y = -2x + 3$.

29. $y = 3x - 2$.

30. $y = 3x + 4$.

Задание №3

11-20. Заданы координаты концов отрезка $M_0 M_1$ (таблица 4). Найти:

1) длину отрезка $M_0 M_1$;

2) общее уравнение прямой $M_0 M_1$.

Таблица 4 – Координаты концов отрезка $M_0 M_1$

	M_0	M_1
1	(3, 2)	(-2, 5)
2	(-2, 6)	(3, -1)
3	(2, 5)	(3, 3)
4	(2, -3)	(1, 0)
5	(5, 3)	(1, 4)
6	(-1, -2)	(0, -3)
7	(1, 5)	(-3, 0)
8	(-3, -5)	(2, -2)
9	(1, 1)	(4, 6)
10	(3, 2)	(4, -1)

Задание №4

31-40. Найти длину малой полуоси эллипса, заданного

каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Сделать чертёж.

$$31. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$32. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$33. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$34. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$35. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$36. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

$$37. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$38. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$39. \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$40. \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Задание №5

41-50. Дан параллелограмм ABCD. Точка M лежит на стороне CD. Координаты вершин параллелограмма задать самостоятельно. Найти сумму(разность) векторов:

$$1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}; \quad 2) \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AM}; \quad 3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Задание №6

51-60. Найти скалярное произведение векторов $a = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $b = \{x_2; y_2; z_2\}$.

$$51. a = \{1; 2; -1\}, \\ b = \{2; 1; 4\}.$$

$$52. a = \{3; -1; 4\}, \\ b = \{2; 10; 1\}.$$

$$53. a = \{2; 1; -2\}, \\ b = \{1; 4; 6\}.$$

$$54. a = \{1; -2; 1\}, \\ b = \{4; 2; 8\}.$$

$$55. a = \{1; 2; -1\},$$

$$b = \{2; 3; 1\}.$$

$$57. a = \{4; 6; 2\},$$

$$b = \{-1; -2; 4\}.$$

$$59. a = \{3; 1; -2\},$$

$$b = \{2; -1; 1\}.$$

$$56. a = \{1; 3; -2\},$$

$$b = \{1; 1; 2\}.$$

$$58. a = \{1; 4; 5\},$$

$$b = \{5; 1; 3\}.$$

$$60. a = \{2; -1; 3\},$$

$$b = \{1; 2; -4\}.$$

Задание №7

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ (таблица 5).

Таблица 5 – Координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$

	Координаты точки A_1	Координаты точки A_2	Координаты точки A_3	Координаты точки A_4
1	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)	(1; 5; 0)
2	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)	(9; 6; 4)
3	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)	(7; 5; 9)
4	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(5; 10; 4)	(4; 7; 8)
5	(10; 6; 6)	(-2; 8; 2)	(6; 8; 9)	(7; 10; 3)
6	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)	(4; 10; 9)
7	(6; 5; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)
8	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)	(2; 3; 7)
9	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)	(8; 10; 7)
0	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)	(8; 4; 1)

Найти объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Сделать чертёж.

Задание №8

71-80. Найти область определения функции $y = f(x)$.

$$71. \quad y = \ln \frac{2x+4}{5-x}.$$

$$72. \quad y = \ln \frac{x+5}{7x-1}.$$

$$73. \quad y = \lg \frac{x-2}{4x-1}.$$

$$74. \quad y = \lg \frac{2x-3}{x+7}.$$

$$75. \quad y = \lg \frac{32-8x}{x+1}.$$

$$76. \quad y = \lg \frac{x-1}{8x+1}.$$

$$77. \quad y = \lg \frac{5-4x}{12x+1}.$$

$$78. \quad y = \lg \frac{2x+1}{x-4}.$$

$$79. \quad y = \lg \frac{2x+1}{1-3x}.$$

$$80. \quad y = \lg \frac{x+1}{2x-1}.$$

Задание №9

81-90. Вычислить произведение и частное двух комплексных чисел

z_1 и z_2 .

$$81. \quad z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 1 + i;$$

$$82. \quad z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 1 - i;$$

$$83. \quad z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = 1 - i;$$

$$84. \quad z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = 1 + i;$$

$$85. \quad z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = -1 + i;$$

$$86. \quad z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = 1 - i;$$

$$87. \quad z_1 = 2 + 4i, \quad z_2 = 2 - i;$$

$$88. \quad z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = 2 + i;$$

$$89. \quad z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = 2 - 3i;$$

$$90. \quad z_1 = 1 - 4i, \quad z_2 = 2 - 3i.$$

Задание №10

91-100. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья.

91. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$.
92. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7}$.
93. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$.
94. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.
95. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.
96. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.
97. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.
98. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$.
99. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.
100. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$.

3. Контрольная работа №1 «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

Задание №1

101-110. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ данной функции $y = f(x)$.

101. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$, б) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$,

- б) $y = \ln \sin(2x + 5)$, г) $\operatorname{tg}(y/x) = 5x$.
 102. а) $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$, б) $y = 4 \sin x / \cos^2 x$,
 б) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$, г) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
 103. а) $y = x \sqrt{(1 + x^2)/(1 - x)}$, б) $y = 1/\operatorname{tg}^2 2x$,
 б) $y = \arcsin \sqrt{1 - 3x}$, г) $y \sin x = \cos(x - y)$.
 104. а) $y = (3 + 6x) \sqrt{3 - 4x + 5x^2}$, б) $y = \sin x - x \cos x$,
 б) $y = x^m \ln x$, г) $(y/x) = \operatorname{arctg}(x/y)$.
 105. а) $y = x \sqrt{a^2 - x^2}$, б) $y = (\sin^2 x)/(2 + 3 \cos^2 x)$,
 б) $y = x \ln x/(x - 1)$, г) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$.
 106. а) $y = 1/\sqrt{x^2 + 1} + 5\sqrt[5]{x^3 + 1}$, б) $y = 2 \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$,
 б) $y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$, г) $y^2 x = e^{y/x}$.
 107. а) $y = \sqrt[3]{(1 + x^2)/(1 - x^2)}$, б) $y = (1/2) \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$,
 б) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$, г) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
 108. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - 5/x}$, б) $y = \ln \sqrt{(1 - \sin x)/(1 + \sin x)}$,
 б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, г) $x - y + a \sin y = 0$.
 109. а) $y = 5\sqrt[5]{x^2 + x} - 1/x$, б) $y = 2^x e^{-x}$,
 б) $y = (\arcsin x)/\sqrt{1 - x^2}$, г) $\ln y = \operatorname{arctg}(x/y)$.
 110. а) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$, б) $y = (1/3) \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$,
 б) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{(3 - x)/(x - 2)}$, г) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.