МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А. Н. Спорыхин

КОНЦЕПЦИИ, ПОДХОДЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

Учебные материалы и лабораторные работы

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

ŋqdqɏəɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏɏqɏè

СОДЕРЖАНИЕ

Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости:

$$\varepsilon_{nn}{}^{p} = 0. \tag{1.6}$$

В (1.1), (1.6) и далее введены обозначения $\sigma_j{}^i, S_j{}^i, \varepsilon_j{}^i, \dot{\varepsilon}_j{}^{p_i}$, $g_j{}^i$ – компоненты тензора напряжений, девиаторы: тензора напряжений, деформаций и скоростей деформаций, компоненты метрического тензора, $c, \eta, \chi, K = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} k$ – параметры среды. Знак «точка» над символом соответствует дифференцированию по времени. Символы «*p*» и «*e*» обозначают принадлежность величин к пластическому и упругому состоянию соответственно.

Поведение материала описывается по геометрически линейной теории, т.е. с помощью соотношений:

– $\nabla_i \sigma_j{}^i = 0$ (уравнения равновесия); (1.7)

– $2\varepsilon_j{}^i = V^i u_j + V_j u^i$ (формула Коши); (1.8)

– граничные условия:

а) на части поверхности S_p в напряжениях

$$n_i \sigma_j{}^i = p_j\ ; \tag{1.9}$$

б) на другой части S_u в перемещениях

$$u_i = U_i; \tag{1.10}$$

в) на поверхности S раздела состояний среды

$$\left[n_i \sigma_j{}^i\right] = 0, \quad [U_i] = 0. \tag{1.11}$$

Здесь n_j – компоненты орта нормали к поверхности тела, p_j, U_j – составляющие поверхностных сил и перемещений соответственно. Квадратные скобки обозначают разность значений выражений, заключенных в них, соответствующих упругой и пластической областям. В упругой области V^e физические уравнения имеют вид (1.4), а статические и геометрические соотношения соответственно: (1.7) и (1.8). Граничные условия имеют вид

(1.9) и (1.10). Приведенные соотношения представляют собой систему уравнений, описывающих напряженно-деформируемое состояние упруго-пластической среды в рамках выбранной модели (1.1) или (1.2), когда одна часть тела находится в упругом, а другая – в пластическом состоянии. Если все тело находится в пластическом состоянии, то математически замкнутые системы уравнений состоят из соотношений (1.1), (1.3) – (1.11) для упруго-вязкопластического тела и соотношений (1.2) – (1.11) для упругопластического тела.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ. ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Системы, испытывающие упруговязкопластические деформации, обладают свойством внутренней неконсервативности вследствие необратимости вязких и пластических деформаций. Поэтому исследование устойчивости основного состояния должно основываться на основе динамического подхода, т.е. на анализе поведения малых возмущений во времени в рамках соответствующей линеаризированной задачи.

В теории упругой устойчивости при динамическом методе исследования основное состояние считается устойчивым, если возмущения во времени затухают, а неустойчивым, когда возмущения возрастают при $t \to \infty$.

При исследовании задач устойчивости с учетом пластических деформаций появление достаточно малых пластических деформаций в силу их необратимости приводит к неустойчивому состоянию в смысле концепции устойчивости, изложенной выше. В этом состоит основное затруднение, которое возникает при непосредственном перенесении понятий устойчивости их механики упругого тела в механику упруго-пластического тела. Трудности вызваны и тем, что при пластических деформациях переход от одной равновесной формы к другой может сопровождаться появлением дополнительных зон разгрузки в момент потери устойчивости. Нагрузки, вычисленные с учетом этого явления, называются приведенно-модульными по аналогии с результатами, полученными Т. Карманом для задачи об устойчивости стержня.

Появление дополнительных зон разгрузки при переходе в смежное состояние даже в случае теории устойчивости тонкостенных элементов вызывает значительные математические трудности, связанные с решением задачи с неизвестными границами (определяются в процессе решения задачи) раздела зон упругости и пластичности. Это обусловило упрощенную постановку задач теории устойчивости тонкостенных систем при упругопластических деформациях, заключающуюся в том, что явление разгрузки в процессе потери устойчивости не учитывается и критические нагрузки определяются, как для физически нелинейного упругого тела, т.е. по местным касательным модулям. Критические нагрузки, полученные при таком подходе, называются касательно-модульными по аналогии с результатами, впервые полученными Ф. Энгессером, для задачи об устойчивости стержня. Обоснование концепции касательно-модульных нагрузок было положено Ф. Шенли и связано с введением концепции продолжающегося нагружения. Согласно этой концепции критической нагрузкой называется такая нагрузка, при которой, наряду с невозмущенной формой равновесия, возможна смежная форма равновесия, причем нагрузка для поддержания смежного состояния равновесия отличается на достаточно малую величину от критической нагрузки, и эта малая нагрузка прикладывается в процессе потери устойчивости так, чтобы компенсировать возникающую дополнительную разгрузку. Следовательно, согласно концепции продолжающегося нагружения, потеря устойчивости начинается несколько раньше, чем внешняя нагрузка достигнет критических значений. В связи с этим потеря устойчивости происходит при незначительном увеличении нагрузки до критических значений, и этого малого увеличения достаточно, чтобы не возникало дополнительной разгрузки при потере устойчивости.

Обобщение этой концепции на трехмерные задачи устойчивости при упругопластических деформациях дано А. Гузем и заключается в следующем. Об устойчивости основного состояния трехмерных упругопластических тел при однородных и неоднородных докритических деформациях можно судить по поведению малых возмущений соответствующей линеаризированной задачи одной из теорий пластичности при неизменяющихся зонах разгрузки, возникающих в докритическом состоянии. При этом считается, что процесс потери устойчивости начинается несколько раньше, чем достигаются критические состояния. В связи с этим процесс потери устойчивости происходит при незначительном, но продолжающемся нагружении, и разгрузка в процессе потери устойчивости не возникает. В рамках указанной концепции приходим к задачам устойчивости для тел с кусочно-однородными свойствами. При этом положение границы раздела пластических и упругих зон известно и определяется из решения задачи о докритическом состоянии. Таким образом, применение обобщенной концепции продолжающегося нагружения в трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) для упругопластических тел открывает обозримые возможности исследования достаточно широкого класса задач, хотя указанная концепция все же является достаточно приближенным подходом. При изучении потери устойчивости процесса деформирования согласно В. Д. Клюшникову в зависимости от режимов нагружения (активное нагружение, разгрузка, нейтральное нагружение) возможны различные линеаризированные задачи (однородные и неоднородные). Причем не исключена возможность существования режимов нагружения (неоднородная линеаризированная задача), допускающих нетривиальное решение уже в начале процесса пластического деформирования. Для трехмерных упругопластических тел этот вопрос является достаточно сложным и еще не решенным. Для других режимов нагружения, сводящихся к однородным линеаризированным задачам, изучение потери устойчивости процесса деформирования связано с решением задачи об определении основного процесса деформирования. Таким образом, основная трудность при исследовании бифуркации состояния равновесия – это решение задачи устойчивости с неизвестными границами зон разгрузки, а в случае исследования бифуркации процесса деформирования она переносится на определение продолжения

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɈbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè