

Алексеевко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.

Введение в теорию концентрированных вихрей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 504 с.

В монографии систематизированы и обобщены сведения о концентрированных вихрях, наблюдаемых в природе и технике. Рассмотрены основные методы исследования их кинематики и динамики. Особое внимание уделено течениям с винтовой симметрией. Описаны модели вихревых структур, применяемые при интерпретации экспериментальных данных и служащие базисом для развития теоретических и численных подходов к изучению вихрей. Представлены достижения в области анализа устойчивости, волн на вихрях и явление распада вихря.

Для научных работников и инженеров, интересующихся вихревыми течениями, а также преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих вузов.

Табл. 12. Ил. 234. Библиогр.: 348 назв.

ISBN 5-93972-397-7

Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L.

Introduction to theory of concentrated vortices. – Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk, 2005.– 504 p.

Knowledge about concentrated vortices observed in nature and technique is systematized and generalized in the book. The methods for research of their kinematics and dynamics are considered. Special attention is paid to the flows with helical symmetry. Models of vortex structures used for interpretation of experimental data are described. These models serve as a ground for development of theoretical and numerical approaches to vortex investigation. Achievements in the fields of stability analysis, waves on vortices and vortex breakdown are presented.

For researchers and engineers concerned with vortex flows as well as for teachers, post-graduates and students of corresponding universities.

Tab. 12. Ill. 234. Ref.: 348

ISBN 5-93972-397-7

Рецензенты: академик РАН В.В. Козлов
член-корреспондент РАН В.В. Пухначев
профессор П.И. Гешев



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №04-01-14014.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Введение	16

Глава 1. Уравнения и законы вихревого движения

1.1. Завихренность. Циркуляция	24
1.2. Динамика завихренной жидкости	28
1.2.1. Уравнения движения идеальной жидкости	28
1.2.2. Теоремы динамики идеальной завихренной жидкости	30
1.2.3. Теорема Бернулли	33
1.2.4. Уравнения движения вязкой жидкости	35
1.3. Уравнения движения в ортогональных координатах	36
1.3.1. Произвольная ортогональная система криволинейных координат	36
1.3.2. Декартова система координат	39
1.3.3. Цилиндрическая система координат	40
1.3.4. Сферическая система координат	41
1.4. Частные случаи движения завихренной жидкости	43
1.4.1. Винтовые потоки (течения Бельтрами)	43
1.4.2. Двумерные течения	46
1.4.3. Одномерные течения	53
1.5. Течения с винтовой симметрией	54
1.5.1. Вывод уравнений	54
1.5.2. Течения с винтовой завихренностью	56
1.5.3. Винтовые потоки с винтовой симметрией поля течения	59
1.6. Определение поля скоростей по источникам и вихрям	60
1.7. Вихревые силы и инварианты вихревого движения	64
1.7.1. Вихревые силы	64
1.7.2. Вихревой импульс и вихревой момент импульса	71
1.7.3. Кинетическая энергия	76
1.7.4. Спиральность	77
1.7.5. Инварианты двумерных течений	79

Глава 2. Вихревые нити

2.1. Геометрия вихревых нитей	84
2.2. Закон Био – Савара	88
2.3. Прямолинейная бесконечно тонкая вихревая нить	91
2.3.1. Вихревая нить в идеальной жидкости	91
2.3.2. Диффузия вихревой нити	95
2.4. Самоиндуцированное движение вихревой нити	97

2.5. Бесконечно тонкое вихревое кольцо	101
2.6. Бесконечно тонкая винтовая вихревая нить	106
2.6.1. Винтовая нить в безграничном пространстве	106
2.6.2. Винтовая нить в цилиндрической трубе	112

Глава 3. Модели вихревых структур

3.1. Вихревая пелена	125
3.2. Пространственно локализованные вихри	130
3.2.1. Вихревое кольцо	130
3.2.2. Сферический вихрь Хилла	138
3.2.3. Сферический вихрь Хикса	141
3.3. Колоннообразные вихри в идеальной жидкости	147
3.3.1. Вихрь Рэнкина	147
3.3.2. Вихрь Гаусса	149
3.3.3. Одномерный винтовой поток	150
3.3.4. Одномерные (колоннообразные) винтовые вихри	151
3.3.5. Q -вихрь	158
3.3.6. Винтовой вихрь с ядром конечного размера	159
3.4. Вязкие модели вихрей	163
3.4.1. Вихрь Бюргерса	163
3.4.2. Вихрь Салливана	166

Глава 4. Устойчивость и волны на колоннообразных вихрях

4.1. Типы возмущений	167
4.2. Неустойчивость вихревой пелены	169
4.3. Волны в жидкости с твердотельным вращением	172
4.3.1. Плоские волны	172
4.3.2. Осесимметричные волны	177
4.3.3. Столб Тейлора	180
4.4. Линейная неустойчивость вихря Рэнкина с аксиальным течением	182
4.4.1. Дисперсионные соотношения	182
4.4.2. Линейный анализ временной неустойчивости	188
4.4.3. Линейный анализ пространственной неустойчивости	197
4.5. Волны Кельвина	199
4.5.1. Дисперсионные уравнения	199
4.5.2. Осесимметричная мода, $m = 0$	200
4.5.3. Изгибная мода, $m = 1$	202
4.5.4. Эволюция начальных локализованных возмущений. Механизмы распространения волн	205
4.6. Неустойчивость Q -вихря. Критерии неустойчивости	213
4.6.1. Критерии неустойчивости	213
4.6.2. Неустойчивость Q -вихря. Невязкий анализ	215
4.6.3. Неустойчивость Q -вихря. Вязкий анализ	221

4.7. Линейные и нелинейные волны на колоннообразных вихрях	
типа Q -вихря	225
4.7.1. Осесимметричные нелинейные стоячие волны	225
4.7.2. Осесимметричные слабонелинейные бегущие волны	230
4.7.3. Изгибные волны	236

Глава 5. Динамика вихревых нитей

5.1. Метод усечения	246
5.2. Самоиндуцированное движение винтовой вихревой нити произвольного шага	254
5.3. Солитон Хасимото	268
5.4. Применение баланса импульса к описанию динамики вихревых нитей	279
5.4.1. Силы, действующие на вихревую нить	279
5.4.2. Вывод уравнений баланса сил	281
5.4.3. Полный вихрь	291
5.4.4. Вихревая нить с внутренней структурой	293
5.4.5. Учет внутренней структуры ядра	298
5.4.6. Модифицированные уравнения движения вихревой нити	302
5.5. Метод сращиваемых асимптотических разложений	302
5.5.1. Вывод уравнения движения вихревых нитей	303
5.5.2. Локальное индукционное приближение	309
5.5.3. N -солитонное решение	312
5.5.4. Комментарии	317

Глава 6. Динамика двумерных вихревых структур

6.1. Метод дискретных вихревых частиц	320
6.1.1. Уравнения движения вихревых частиц в безграничной жидкости	320
6.1.2. Уравнения движения вихревых частиц в ограниченных односвязных областях	326
6.1.3. Уравнения движения системы соосных вихревых колец	334
6.2. Движение системы прямолинейных вихрей	338
6.2.1. Взаимодействие двух одинаковых вихрей при разных начальных расстояниях	339
6.2.2. Взаимодействие двух вихрей одного размера, но с разными циркуляциями	342
6.2.3. Взаимодействие двух вихрей с одинаковой циркуляцией, но с разными размерами	342
6.2.4. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями одного знака	343
6.2.5. Взаимодействие двух вихрей с циркуляциями разных знаков	345
6.2.6. Взаимодействие трех вихрей с циркуляциями разных знаков. Коллапс вихрей	348
6.3. Моделирование динамики сдвиговых течений	351
6.3.1. Механизмы образования крупных вихрей в сдвиговом слое	351
6.3.2. Неустойчивость разгонного вихря	357

6.3.3. Неустойчивость следа за тонкой пластиной	367
6.4. Движение вихрей в цилиндрических трубах	376
6.4.1. Уравнения движения вихревых частиц в круговой области	377
6.4.2. Прецессия прямолинейного вихря в трубе	378
6.4.3. Движение винтового вихря в трубе	384
Глава 7. Экспериментальное наблюдение	
концентрированных вихрей в вихревых аппаратах	
7.1. Экспериментальные методы	389
7.1.1. Экспериментальное оборудование	389
7.1.2. Параметры закрученного потока	394
7.2. Винтовая симметрия вихревых течений	396
7.3. Концентрированный вихрь с прямолинейной осью	401
7.3.1. Генерация концентрированных вихрей	401
7.3.2. Композиция вихрей	414
7.4. Прецессия вихревого ядра	420
7.5. Стационарные винтовые вихревые нити	428
7.5.1. Одиночные винтовые вихри	429
7.5.2. Двойная спираль	433
7.6. Возмущения вихревого ядра	437
7.6.1. Волны на концентрированных вихрях	437
7.6.2. Распад вихря в канале	442
7.6.3. Распад вихря в сосуде с вращающейся крышкой	456
Список литературы	479
Список основных обозначений	498
Предметный указатель	500

CONTENTS

Preface.....	13
Introduction.....	16

Chapter 1. Equations and laws of vortex motion

1.1. Vorticity. Circulation	24
1.2. Vortex dynamics	28
1.2.1. Equations of ideal fluid motion	28
1.2.2. Theorems of vortex motion of an ideal fluid	30
1.2.3. Bernoulli's theorem	33
1.2.4. Equations of viscous fluid motion	35
1.3. Motion equations in orthogonal coordinates	36
1.3.1. Arbitrary orthogonal system of curvilinear coordinates	36
1.3.2. Cartesian coordinate system	39
1.3.3. Cylindrical coordinate system	40
1.3.4. Spherical coordinate system	41
1.4. Particular cases of vortex motion	43
1.4.1. Helical flows (Beltrami flows)	43
1.4.2. Two-dimensional flows	46
1.4.3. One-dimensional flows	53
1.5. Flows with helical symmetry	54
1.5.1. Derivation of equations	54
1.5.2. Flows with helical vorticity	56
1.5.3. Helical flows with helical symmetry of the flow field	59
1.6. Determination of the velocity field by sources and vortices	60
1.7. Vortex forces and invariants of vortex motion	64
1.7.1. Vortex forces	64
1.7.2. Vortex momentum and vortex angular momentum	71
1.7.3. Kinetic energy	76
1.7.4. Helicity	77
1.7.5. Invariants of two-dimensional flows	79

Chapter 2. Vortex filaments

2.1. Geometry of vortex filaments	84
2.2. Biot – Savart law	88
2.3. Rectilinear infinitely thin vortex filament	91
2.3.1. Vortex filament in ideal fluid	91
2.3.2. Diffusion of vortex filament	95

2.4. Self-induced motion of vortex filament	97
2.5. Infinitely thin vortex ring	101
2.6. Infinitely thin helical vortex filament	106
2.6.1. Helical vortex filament in infinite space	106
2.6.2. Helical vortex filament in a cylindrical tube	112

Chapter 3. Models of vortex structures

3.1. Vortex sheet	125
3.2. Spatial localized vortices	130
3.2.1. Vortex ring	130
3.2.2. Hill's spherical vortex	138
3.2.3. Hicks spherical vortex	141
3.3. Columnar vortices in ideal fluid	147
3.3.1. Rankine vortex	147
3.3.2. Gauss vortex	149
3.3.3. One-dimensional helical flow	150
3.3.4. One-dimensional (columnar) helical vortices	151
3.3.5. Q -vortex	158
3.3.6. Helical vortex with a finite-size core	159
3.4. Viscous models of vortices	163
3.4.1. Burgers vortex	163
3.4.2. Sullivan vortex	166

Chapter 4. Stability and waves in columnar vortices

4.1. Types of perturbations	167
4.2. Instability of a vortex sheet	169
4.3. Waves in liquids with solid-body rotation	172
4.3.1. Plane waves	172
4.3.2. Axisymmetrical waves	177
4.3.3. Taylor column	180
4.4. Linear instability of Rankine vortex with an axial flow	182
4.4.1. Dispersion relations	182
4.4.2. Linear analysis of temporal instability	188
4.4.3. Linear analysis of spatial instability	197
4.5. Kelvin waves	199
4.5.1. Dispersion equations	199
4.5.2. Axisymmetrical mode, $m = 0$	200
4.5.3. Bending mode, $m = 1$	202
4.5.4. Evolution of initial localized perturbations	
Mechanisms of wave propagation.....	205
4.6. Instability of Q -vortex. Instability criteria.....	213
4.6.1. Instability criteria	213
4.6.2. Instability of Q -vortex. Inviscid analysis.....	215
4.6.3. Instability of Q -vortex. Viscous analysis	221

4.7. Linear and non-linear waves in columnar vortices of the Q -type	225
4.7.1. Axisymmetrical non-linear standing waves	225
4.7.2. Axisymmetrical weakly-nonlinear travelling waves	230
4.7.3. Bending waves	236

Chapter 5. Dynamics of vortex filaments

5.1. Cut-off method	246
5.2. Self-induced motion of helical vortex filament with an arbitrary pitch	254
5.3. Hasimoto soliton	268
5.4. Application of momentum balance to description of dynamics of vortex filaments	279
5.4.1. Forces acting on vortex filament	279
5.4.2. Derivation of force-balance equations	281
5.4.3. Hollow vortex	291
5.4.4. Vortex filament with an inner structure	293
5.4.5. Consideration of the inner core structure	298
5.4.6. Modified equations of vortex filament motion	302
5.5. The method of matched asymptotic expansions	302
5.5.1. Derivation of equation for vortex filament motion	303
5.5.2. Local induction approximation	309
5.5.3. N -soliton solution	312
5.5.4. Comments	317

Chapter 6. Dynamics of two-dimensional vortex structures

6.1. The method of discrete vortex particles	320
6.1.1. Motion equations of vortex particles in infinite liquid	320
6.1.2. Motion equations of vortex particles in limited simply connected domains	326
6.1.3. Motion equations of the system of coaxial vortex rings	334
6.2. Motion of the system of rectilinear vortices	338
6.2.1. Interaction of two identical vortices at various initial distances	339
6.2.2. Interaction of two vortices of the same size but with different circulations	342
6.2.3. Interaction of two vortices of the same circulations but with different sizes	342
6.2.4. Interaction of three vortices with circulations of the same sign	343
6.2.5. Interaction of two vortices with circulations of contrary signs	345
6.2.6. Interaction of three vortices with circulations of contrary signs Vortex collapse	348
6.3. Modeling of dynamics of shear flows	351
6.3.1. Mechanisms of large vortex formation in a shear layer	351
6.3.2. Instability of a starting vortex	357
6.3.3. Wake instability behind a thin plate	367
6.4. Vortex motion in cylindrical tubes	376
6.4.1. Motion equations for vortex particles in circular domain	377

6.4.2. Precession of a rectilinear vortex in a tube	378
6.4.3. Motion of a helical vortex in a tube	384
Chapter 7. Experimental observation of concentrated vortices in vortex apparatuses	
7.1. Experimental methods	389
7.1.1. Experimental equipment	389
7.1.2. Parameters of a swirling flow	394
7.2. Helical symmetry of vortex flows	396
7.3. Concentrated vortex with a rectilinear axis	401
7.3.1. Generation of concentrated vortices	401
7.3.2. Vortex composition	414
7.4. Precession of a vortex core	420
7.5. Stationary helical vortices	428
7.5.1. Single helical vortices	429
7.5.2. Double helix	433
7.6. Perturbations of a vortex core	437
7.6.1. Waves on concentrated vortices	437
7.6.2. Vortex breakdown in a channel	442
7.6.3. Vortex breakdown in a container with rotating lid	456
References	479
Main symbols	498
Subject index	500