ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для вузов

Составители:
В.З. Мешков,
А.Т. Астахов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ИЗОТРОПНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде (из $\mathbb{R}^n$) описывается следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t). \tag{1}$$

$\rho(x) > 0$, $\kappa(x) \geqslant \kappa_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\kappa(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, $F(x,t) \in C(\overline{Q_T})$.

Рассмотрим твердое тело в $\mathbb{R}^3$, температура которого в точке (x,y,z) в момент времени t определяется функцией $u(x,y,z,t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности экспериментально установлено, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \cdot \Delta S$ и нормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, т. е.

$$\Delta Q = -\kappa \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot \Delta S \cdot \Delta t = -\kappa \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot \operatorname{grad}_n u, \tag{2}$$

где $\kappa > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, а $\vec{n}$ — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело *изотропно* в отношении теплопроводности, т. е. что коэффициент внутренней теплопроводности κ зависит только от точки (x,y,z) тела и не зависит от направления нормали поверхности S в этой точке.

Обозначим через q *тепловой поток*, т. е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (2) можно записать в виде

$$q = -\kappa\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}. \tag{3}$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени (t_1,t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность S за промежуток времени (t_1,t_2), согласно формуле (2), входит количество тепла, Отметим, что при такой форме уравнений не учитывается тепловой обмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающим пространством.

Мы будем записывать уравнения диффузии единой формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f. \tag{7}$$

Уравнение (7) называется уравнением теплопроводности.

Постановка основных задач

Будем рассматривать следующее уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leqslant T.$$

Если нам известна температура в стержне в начальный момент времени, то мы получаем начальное условие:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

а если всегда знаем ход температуры на краях, то некоторые из краевых условий:

при $x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1)\ u(0,t) & = & \mu_1(t) - \text{первое краевое условие,} \\ (2)\ u_x(0,t) & = & \nu_1(t) - \text{второе краевое условие,} \\ (3)\ u_x(0,t) & = & \lambda_1\left(u(0,t) - \Theta_1(t)\right) - \text{третье краевое условие } (\lambda_1 > 0); \end{array}\right.$$

при $x = \ell$, $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (4)\ u(\ell,t) & = & \mu_2(t) - \text{первое краевое условие,} \\ (5)\ u_x(\ell,t) & = & \nu_2(t) - \text{второе краевое условие,} \\ (6)\ u_x(\ell,t) & = & -\lambda_2\left(u(0,t) - \Theta_2(t)\right) - \text{третье краевое условие } (\lambda_2 > 0). \end{array}\right.$$

Выбирая несколько из этих условий, можно получить различные типы задач.

Первая краевая задача.

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) & = & \mu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(\ell,t) & = & \mu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant \ell. \end{array}\right.$$

Вторая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leqslant T; \\ u_x(0,t) = \nu_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u_x(\ell,t) = \nu_2(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant \ell. \end{cases}$$

Задача на полупрямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0, \quad 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) = \mu(t), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача Коши.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x + \infty. \end{cases}$$

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $T > 0$ фиксированное число. Обозначим через Q_T цилиндр вида

$$Q_T = \{(x,t): \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leqslant T\}.$$

При $n = 2$ – цилиндр с основанием в области Ω, его высота равна T.

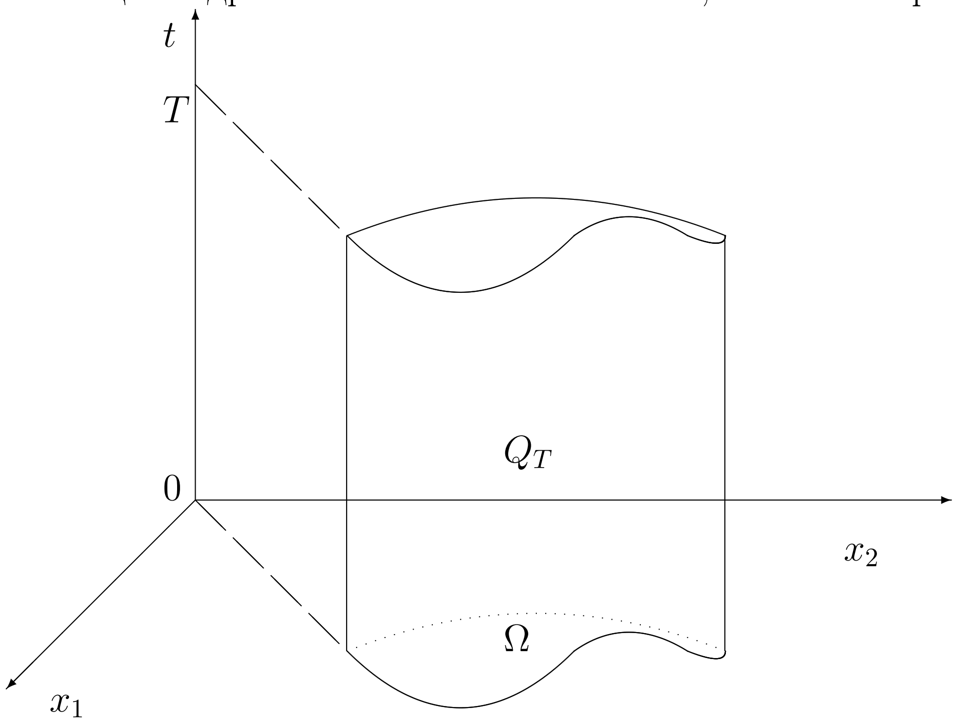

Рис. 1

Обозначим $\Gamma = \partial\Omega$ – границу области Ω. $S = \{(x,t) : x \in \Gamma, t \in [0,T]\}$ – боковая поверхность цилиндра. Для множества точек $(x,0)$, где $x \in \Omega$ оставим то же обозначение.

Теорема (принцип максимума для уравнения теплопроводности). *Всякое решение уравнения теплопроводности* $u_t = \Delta u$, *непрерывное в* $Q_T \cup \Omega \cup S$, *принимает наибольшее и наименьшее значение на* $\Omega \cup S$, *т. е.* $\max\limits_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max\limits_{\Omega\cup S} u(x,t)$.

Доказательство. Теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменой знака у $u(x,t)$, поэтому ограничимся доказательством только теоремы о максимуме. Предположим, что теорема о максимуме неверна, т. е. найдется в Q_T точка (x_0,t_0), в которой

$$u(x_0,t_0) > M = \max_{\Omega\cup S} u(x,t).$$

Обозначим $\varepsilon = u(x_0,t_0) - M > 0$, рассмотрим функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T}.$$

Имеем $v(x,t) \leqslant u(x,t) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall (x,t) \in \overline{Q_T}$. Тогда

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t_0}{T} \geqslant u(x_0,t_0) = \varepsilon + M \geqslant \varepsilon + u(x,t) =$$

$$= \varepsilon + v(x,t) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T} \geqslant \varepsilon + v(x,t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \cup S.$$

Отсюда следует, что $v(x,t)$ принимает свое максимальное значение в какой-то внутренней точке цилиндра. Обозначим эту точку через $(x_1,t_1) \in Q_T$. (Точка (x_1,t_1) может совпадать с (x_0,t_0).) Тогда по теореме из математического анализа в этой точке должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial x_\kappa} = 0, \quad \Delta v \leqslant 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$$

(если $t_1 < T$, то $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$ в точке (x_1,t_1), если же $t_1 = T$, то $\dfrac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$, т. е. может быть граничный экстремум). Поэтому в точке (x_1,t_1) имеем $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \geqslant 0$. С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \frac{\varepsilon}{2T} = -\frac{\varepsilon}{2T} < 0.$$

Получили противоречие, теорема доказана. □

ŋqdqʎɐʎ bɐ dɐdɐbʎɐɐ d ɐɔɐqɔʎ ɔqdqʎqʎè