

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. Ю. Левин

**ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

Монография

Ярославль 2011

УДК 517.925.56, 517.926.4, 517.948.3
ББК В161.61я43
Л36

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор Б. Н. Садовский;
кафедра математического моделирования
Воронежского государственного университета.

Л36 Левин, А. Ю. Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения: монография / науч. ред. С. Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 230 с. ISBN 978-5-8397-0797-9.

Настоящее издание представляет собой монографию, составленную по докторской диссертации известного математика, профессора Анатолия Юрьевича Левина (1936 – 2007).

Для широкого круга специалистов, аспирантов, студентов, интересующихся качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ил. 1. Библиогр.: 151 назв.

Редколлегия
В. Ш. Бурд, С. Д. Глызин (научный редактор),
В. С. Рублев

УДК 517.925.56, 517.926.4,
517.948.3
ББК В161.61я43

ISBN 978-5-8397-0797-9

© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2011

О докторской диссертации А. Ю. Левина

Докторская диссертация А. Ю. Левина — выдающийся вклад в качественную теорию линейного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка

$$Lx = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0. \quad (1)$$

Диссертация А. Ю. Левина является итогом его исследований, выполненных в течение 1960–1969 годов. Ряд важных и интересных результатов получены им также для систем линейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Фредгольма. Но, как отмечает А. Ю. Левин, системы дифференциальных уравнений и интегральные уравнения рассмотрены под углом зрения, связанным со спецификой дифференциального уравнения n -го порядка.

Результаты Левина были высоко оценены М. Г. Крейном, В. А. Якубовичем, Д. В. Аносовым и другими известными математиками. Тем не менее диссертация не была утверждена ВАКом. Экспертная комиссия ВАКа по математике руководствовалась при этом совсем не научными соображениями. В эти годы экспертная комиссия использовалась как государственная дубина для подавления некоторых неугодных математических школ.

Перейдем к содержанию диссертации. Диссертация состоит из четырех глав. Сразу отметим, что часть результатов первой и второй главы анонсированы в кратких заметках в Докладах АН СССР и не публиковались подробные доказательства этих результатов в общедоступных журналах. К этому вопросу мы еще вернемся.

Первая глава (самая большая по объему) начинается с рассмотрения уравнения (1) с комплекснозначными коэффициентами $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, локально суммируемыми в $(a, b]$. Ставится следующая задача: как должны вести себя коэффициенты уравнения (1) в окрестности точки a , чтобы задача Коши $x^{(i)}(a) = c_i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ имела решение при любых c_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$? На этот вопрос дается исчерпывающий ответ. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в явном виде. Интересен метод доказательства этого результата. Задача сводится к вопросу о разрешимости задачи Коши для системы уравнений первого порядка, и используется тот факт, что дополнительное слагаемое с суммируемой на $[a, b]$ матрицей коэффициентов не влияет на разрешимость задачи Коши. После этого задача сводится к задаче с явно интегрируемой системой уравнений.

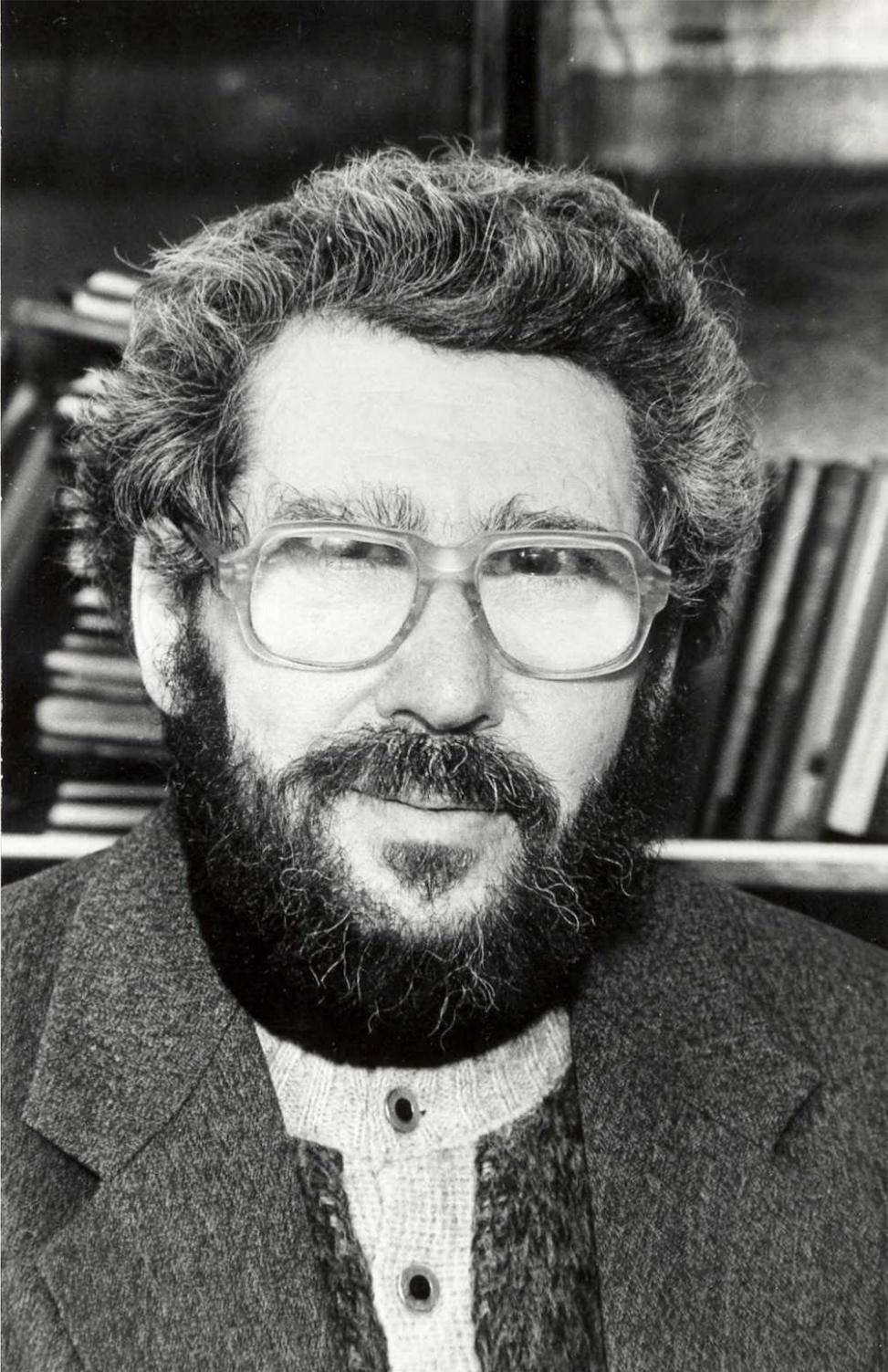
В качестве приложения существенно усиливается результат Э. Хилле [1] об асимптотике решений на бесконечном промежутке уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + q(t)x = 0.$$

Во втором параграфе рассматривается задача о непрерывной зависимости решений линейных дифференциальных уравнений от параметра на конечном промежутке. Рассматривается последовательность матричных уравнений

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k + F_k, \quad X_k(a) = C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (a \leq t \leq b), \quad (2)$$

где матрицы $A_k(t)$, $F_k(t)$ суммируемы на $[a, b]$. Ставится следующая задача: при каких условиях на матрицы $A_k(t)$, $F_k(t)$ последовательность решений $X_k(t)$ системы (2) при любой матрице C сходится к матрице $X_0(t)$ равномерно на $[a, b]$? Метод решения этой задачи идейно близок к методу первого параграфа. Полученные достаточные условия в случае одного уравнения n -го порядка приводят к полному решению задачи —



Оглавление

О докторской диссертации А. Ю. Левина	4
ВВЕДЕНИЕ	15
1. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ	38
§ 1. Разрешимость задачи Коши	38
§ 2. Непрерывная зависимость решений от параметра	44
§ 3. Обобщенные уравнения	58
§ 4. Приложение к вопросам устойчивости для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$	78
2. УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ГЛАДКИМ ЯДРОМ И ОДНОМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ	100
§ 1. Об одном уравнении Фредгольма	100
§ 2. О функциях Грина одномерных краевых задач	111
§ 3. Двухточечные интерполяционные задачи и интегральный признак неосцилляции для уравнения $x^{(n)} + q(t)x = 0$	129
3. НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$	145
§ 1. Обсуждение проблематики, связанной с неосцилляцией	145
§ 2. Иерархия решений. Обобщенные нули	158
§ 3. Некоторые вопросы распределения нулей	167
§ 4. Критерий неосцилляции	177
§ 5. Приложение к асимптотическим оценкам решений	189
Дополнение. Об одной работе Ф. Хартмана	194
4. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ В НЕКОЛЕБАТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ	198
§ 1. Классификация неколебательных случаев для знакопостоянной $q(t)$ (формулировки и обсуждение)	198
§ 2. Теоремы о возмущении. Доказательства утверждений, изложенных в § 1	204
§ 3. Дополнения и приложения	213
Литература	221