



А.И. Плис
Н.А. Сливина

MATHCAD

математический практикум

Найти max $(3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
при условии, что:
 $2 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + 6x_3 - 12x_4 \leq 15$
 $3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12 \cdot x_4 \leq 1$
 $+ 23x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 =$
 $+ 4x_3 + 10x_4 - 7$
 $+ 3x_5$

Вся математика
от пределов
и производных
до фазовых портретов
и проверки
статистических гипотез
с Mathcad

А.И.Плис, Н.А.Сливина

MATHCAD

**математический
практикум
для инженеров
и экономистов**

Второе издание,
переработанное
и дополненное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обу-
чающихся по экономическим
и техническим специальностям

F

**МОСКВА
“ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА”
2003**

УДК 004.434
ББК 22.1с51я73
ПЗ8

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра математического моделирования
Московского государственного технического
университета им. Н.Э.Баумана;

М.И. Шабунин,
доктор педагогических наук, профессор

Плис А.И., Сливина Н.А.

ПЗ8 Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов:
Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика,
2003. – 656 с.: ил.

ISBN 5-279-02550-X

Пособие представляет собой сборник компьютерных занятий по стандартному курсу высшей математики для экономических и инженерных специальностей. Занятия включают постановку задачи, краткое описание математического метода ее решения, анализ результатов вычислений. Примеры содержат все необходимые рекомендации по работе с математической моделью в среде математического пакета Mathcad. Во 2-е издание (1-е изд. — 2002 г.) добавлены вычисления с комплексными числами и переработана структура книги.

Для студентов экономических и инженерных вузов, преподавателей математики, научных работников, пользователей компьютеров, применяющих математические методы в практической работе.

П $\frac{2404000000 - 025}{010(01) - 2003}$ 209 – 2002

УДК 004.434
ББК 22.1с51я73

ISBN 5-279-02550-X

© А.И. Плис, Н.А. Сливина, 2002
© А.И. Плис, Н.А. Сливина, 2003

Оглавление

Предисловие	9
-------------	---

Глава 1. Введение в Mathcad	13
-----------------------------	----

1.1. Что такое Mathcad?	13
1.2. Основные характеристики Mathcad	15
1.3. Начало работы в среде Mathcad	19
1.4. Простейшие вычисления и операции в Mathcad	22
Простейшие арифметические вычисления (23). Определение переменной и ее значения. Вычисление значений выражений, содержащих переменные (25). Определение и вычисление значения функции в точке. Построение таблицы значений функции (26). Построение декартова графика функции (26). Сохранение рабочего документа в файле на диске (28). Открытие нового рабочего документа (29). Чтение рабочего документа из файла на диске (29).	
1.5. Меню Mathcad	29
1.6. Панели инструментов Mathcad	42
1.7. Режим справки	46
1.8. Решение задач элементарной математики в Mathcad	51
Преобразование алгебраических выражений (51). Определение, построение таблиц значений и графиков функций (54). Символьное решение уравнений и систем (57).	
1.9. Вычисления с комплексными числами в Mathcad	58

Глава 2. Задачи линейной алгебры	66
----------------------------------	----

2.1. Используемые инструменты Mathcad	66
2.2. Действия с матрицами	75
Основные матричные операции (75). Транспонирование. Вычисление обратной матрицы. Ортогональные матрицы (79). Вычисление степени матрицы. Некоторые специальные матрицы (82). Вычисление определителей (84).	
2.3. Системы линейных алгебраических уравнений	85
Матричная форма записи линейных систем. Решение матричных уравнений (85). Решение линейной системы методом Гаусса (87). Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций (90). Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя (93).	

2.4.	Общая теория линейных систем	97
	Однородные системы линейных алгебраических уравнений (97). Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений (101).	
2.5.	Линейное пространство. Основные понятия	105
	Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе (105). Исследование линейной зависимости. Ранг матрицы (109). Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы (111).	
2.6.	Элементарная теория линейных операторов	114
	Линейный оператор и его матрица. Переход к другому базису (115). Образ и ядро линейного оператора (117). Собственные значения и собственные векторы линейного оператора (120).	
2.7.	Матричные вычисления в экономических задачах	125
	Цены в системе межотраслевых связей (125). Простейшая модель экспорта и импорта (128). Линейная модель международной торговли (130).	
2.8.	Решение переопределенных систем	133
	Проекция на подпространство и метод наименьших квадратов (133). Аппроксимация эмпирических данных методом наименьших квадратов (136).	
Глава 3. Задачи математического анализа		142
3.1.	Используемые инструменты Mathcad	142
	Определение функций и построение графиков (142). Вычисление пределов (147). Дифференцирование (148). Интегрирование (150). Суммирование рядов (151). Разложение функций по формуле Тейлора (152).	
3.2.	Сходимость числовых последовательностей	153
3.3.	Предел функции	161
	Предел функции в точке (161). Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых (166).	
3.4.	Классификация точек разрыва. Поведение функции на границах области определения	169
	Непрерывность и разрывы функции. Классификация разрывов (169). Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций (172).	
3.5.	Производная и ее вычисление	174
	Односторонние производные (175). Геометрический смысл производной (177).	
3.6.	Исследование функций и построение графиков	182
	Вертикальные и наклонные асимптоты (182). Исследование функции с помощью производной (184). Исследование функции с использованием второй производной (187).	

3.7. Кривая на плоскости	191
Кривые на плоскости, заданные в декартовых координатах (191). Кривые на плоскости, заданные параметрически (194). Кривые на плоскости, заданные в полярных координатах (197).	
3.8. Формула Тейлора	198
3.9. Функции одной переменной в экономических задачах	203
Функции спроса. Равновесная цена (203). Функции спроса. За- висимость спроса от дохода (206). Максимальная прибыль (209). Средние и предельные показатели (212). Эластичность экономи- ческих функций (213).	
3.10. Неопределенный интеграл. Интегрирование заменой переменной	217
3.11. Определенный интеграл	221
3.12. Несобственные интегралы	224
Интеграл как функция верхнего предела (224). Несобственные интегралы по неограниченному промежутку (227). Несобственные интегралы от неограниченных функций (230).	
3.13. Числовые ряды	232
Основные понятия (232). Ряды с неотрицательными членами (236). Знакопеременные ряды (240).	
3.14. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора . .	241
3.15. Разложение функций в ряд Фурье	247
Сходимость ряда Фурье. Явление Гиббса (247). Приближение функций. Минимальное свойство коэффициентов Фурье (251). Зависимость скорости сходимости ряда Фурье от гладкости функ- ции (253). Ряд Фурье на произвольном отрезке (257).	
3.16. Функции многих переменных. Основные понятия . . .	259
Графики функций двух переменных. Линии уровня. Локальные экстремумы (259). Частные производные. Производная по напра- влению. Градиент. Производные высших порядков (264).	
3.17. Формула Тейлора для функции многих переменных . .	269
Формулы Тейлора и Маклорена. Аппроксимация функции много- членом (269). Локальный экстремум (273).	
3.18. Функции многих переменных в экономических задачах	277
Производственные функции (277). Эластичность производствен- ной функции (эластичность выпуска) (281). Производственная функция Кобба — Дугласа (282). Производственная функция CES (функция с постоянной эластичностью замещения) (284).	

Глава 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения 288

4.1.	Используемые инструменты Mathcad	288
	Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (292). Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (292). Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков (293). Решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (295). Решение задачи Коши для жесткой задачи (296). Построение интегральных и фазовых кривых автономной системы (297). Построение векторного поля автономной системы (300).	
4.2.	Дифференциальные уравнения первого порядка	301
	Уравнение с разделяющимися переменными (303). Численное решение задачи Коши методом Рунге — Кутты (305).	
4.3.	Уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений	308
4.4.	Жесткие системы. Решение дифференциальных уравнений методом матричной экспоненты	315
4.5.	Автономные системы на плоскости	324
	Фазовая плоскость, фазовые кривые (325). Точки покоя линейной автономной системы (329). Векторное поле автономной системы (334). Устойчивые решения. Предельные циклы. Фазовые портреты нелинейных систем (339).	
4.6.	Динамические системы в экономических задачах	342
	Динамика популяций. Уравнения Вольтерра — Лотка (342). Уравнения Вольтерра — Лотка с логистической поправкой (346). Модель Холлинга — Тэннера (349). Выравнивание цен (352).	
4.7.	Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений операционным методом	355

Глава 5. Теория вероятностей 361

5.1.	Функции и инструменты Mathcad	361
5.2.	Случайные величины. Функции распределения	367
	Функция распределения случайной величины (367). Наиболее распространенные распределения дискретных случайных величин (370).	
5.3.	Предельные распределения для биномиального распределения	377
	Теорема Пуассона (377). Локальная теорема Муавра — Лапласа (379). Интегральная теорема Муавра — Лапласа (382). Теорема Бернулли (383).	
5.4.	Непрерывные случайные величины	385
	Наиболее распространенные распределения непрерывных случайных величин (385). Квантили (396).	

5.5. Совместные распределения нескольких случайных величин	397
Многомерные случайные величины. Функции распределения многомерных случайных величин (398). Независимость случайных величин (400).	
5.6. Условные распределения случайных величин	403
Условные распределения дискретных случайных величин (403). Условные распределения непрерывных случайных величин (408).	
5.7. Числовые характеристики случайных величин	415
Математическое ожидание случайной величины (415). Дисперсия случайной величины (417). Моменты (419). Эксцесс (422). Среднее гармоническое и среднее геометрическое случайных величин, принимающих только положительные значения (424).	
5.8. Числовые характеристики двумерных случайных величин	427
Математическое ожидание (427). Дисперсия (429). Условное математическое ожидание (431). Ковариация (439). Корреляция (442).	
Глава 6. Задачи математической статистики	447
6.1. Используемые инструменты Mathcad	447
Ввод и вывод файлов данных (447). Функции вычисления выборочных характеристик (449). Построение эмпирических распределений (451). Моделирование выборок из стандартных распределений (454).	
6.2. Основные задачи статистики. Выборки. Гистограммы. Полигоны частот	455
Эмпирические распределения и числовые характеристики (455). Числовые характеристики выборки (463). Оценка функции распределения (466).	
6.3. Точечные оценки параметров распределений	475
Точечные оценки математического ожидания (475). Точечные оценки дисперсии (478). Точечная оценка вероятности события (480). Точечная оценка параметров равномерного распределения (482).	
6.4. Методы получения точечных оценок	485
Метод максимального правдоподобия для дискретной случайной величины (485). Метод максимального правдоподобия для непрерывной случайной величины (488).	
6.5. Интервальное оценивание параметров нормально распределенной случайной величины	495
Доверительные интервалы для математического ожидания (496). Доверительный интервал для дисперсии (498). Доверительный интервал для параметров пуассоновского распределения (502). Доверительный интервал для вероятности (504). Доверительный интервал для коэффициента корреляции (506).	

6.6. Проверка статистических гипотез о параметрах нормально распределенной случайной величины	510
Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при известной дисперсии (511). Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при неизвестной дисперсии (517). Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии (520). Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при известных дисперсиях (523). Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий распределений при равных неизвестных дисперсиях (526).	
6.7. Линейная регрессия	529
6.8. Элементы дисперсионного анализа	542
Однофакторный дисперсионный анализ (542). Двухфакторный дисперсионный анализ (549).	

Приложение 1. Примеры решения задач оптимизации	557
--	------------

Одномерная минимизация. Минимум гладкой унимодальной функции (557). Многомерная безусловная минимизация. Минимум гладкой функции (558). Решение задачи линейного программирования с помощью функции maximize (560). Отыскание условного минимума с помощью функции minimize (560). Отыскание максимума и минимума функции при заданных ограничениях (561).

Приложение 2. Варианты заданий	563
---------------------------------------	------------

Глава 2	563
Глава 3	589
Глава 4	617
Глава 5	627
Глава 6	640

Литература	654
-------------------	------------

ПРЕДИСЛОВИЕ

Чрезвычайная простота интерфейса Mathcad сделала его одним из самых популярных и безусловно самым распространенным в студенческой среде математическим пакетом. Он предоставляет пользователю обширный набор инструментов для реализации графических, аналитических и численных методов решения математических задач на компьютере. Выполняя рутинные или несущественные (в контексте изучаемого раздела) операции, пакет позволяет студенту, не владеющему в полной мере техникой математических преобразований, самостоятельно выполнить громоздкие вычисления, решить содержательные задачи, приобрести устойчивые навыки решения прикладных задач. При этом учащийся общается с компьютером на уровне математических понятий, идей, общих подходов и за небольшое время может рассмотреть самостоятельно много примеров. Эти свойства общения с вычислительной средой особенно важны для развития творческого, критического и независимого мышления, поскольку учащийся может всесторонне исследовать новые объекты, выделить общие закономерности и сформулировать обобщающие утверждения на основе собственных наблюдений.

Пакет Mathcad можно использовать как средство модернизации курсов, как среду для общения учащегося с преподавателем, как средство контроля и самоконтроля, как инструмент помощи учащемуся при самостоятельной работе. При создании учебных курсов Mathcad помогает преподавателям подготовить содержательные динамические иллюстрации, перенести акценты на концептуальные аспекты изучаемых проблем, обогатить курс примерами, возникающими в различных областях науки и практики, которые обычно не рассматриваются в учебных курсах из-за их сложности. Лекционные демонстрации можно подготовить таким образом, что каждый учащийся получит столько примеров, сколько именно ему необходимо для понимания существа вопроса. Для одного и того же раздела можно подготовить самые различные по объему, форме и глубине учебные курсы.

Предлагаемая читателю книга представляет собой сборник компьютерных занятий в среде Mathcad по стандартному курсу (с включением некоторых специальных разделов) высшей математики для инженерных и экономических вузов. Часть занятий целиком отводится экономическим приложениям.

Структура практикума такова, что большая часть материала не связана с конкретным программным обеспечением и его можно успешно использовать не только с любой версией Mathcad, но и с другими математическими пакетами.

Каждый раздел практикума посвящен изучению определенной темы или метода решения математической задачи и содержит:

- теоретическое введение, включающее определения и сводку основных результатов;
- описание математического метода решения задачи;
- формулировку одного или нескольких заданий с индивидуальными вариантами для группы из 20 студентов;
- описание порядка выполнения работы в среде Mathcad;
- пример решения типовой задачи, включающий фрагмент или полный текст рабочего документа Mathcad, снабженный комментариями и краткими указаниями, помогающими реализовать решение задачи на компьютере.

Цель практикума — научить быстро и легко решать в среде Mathcad простейшие математические задачи. Поэтому в книге нет полного описания возможностей и функций пакета, а представлены только операции, вынесенные в меню и кнопочные панели, а также наиболее часто используемые встроенные функции.

Книга состоит из шести глав. В начале каждой главы приводится краткое описание функций и инструментов Mathcad, используемых при решении задач главы, и даны примеры использования этих инструментов. Искушенный читатель, столкнувшийся с необходимостью решить конкретную задачу, возможно, ограничится чтением этого раздела.

В главе 1 дана краткая характеристика пакета Mathcad, описаны простейшие приемы работы с ним и приведены примеры решения основных задач элементарной математики. Глава адресована начинающим пользователям. Авторы предполагают, что эта категория читателей получит представление о возможностях Mathcad и, выполнив задания, справится с предложенными в следующих главах задачами.

В главе 2 рассматриваются задачи линейной алгебры. Описаны методы решения практически всех задач стандартного курса: от простейших операций с матрицами до элементарной теории линейных операторов. В качестве приложений приводятся задачи межотраслевого баланса и задача аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

В главе 3, самой большой по объему, описывается решение основных задач математического анализа функций одной и нескольких пере-

менных — от предела последовательности до исследования сходимости тригонометрических рядов. При изложении материала широко используются графические возможности пакета. Привлечение графики позволяет наглядно продемонстрировать и объяснить многие тонкие и традиционно трудные для понимания математические понятия. Некоторые разделы главы знакомят читателя с понятиями и функциями, используемыми в экономике (функции спроса и предложения, производственные функции одной и нескольких переменных, эластичность и др.).

При отборе материала главы 4, посвященной дифференциальным уравнениям, авторы достаточно далеко отошли от общепринятого стиля изложения этого раздела в стандартном курсе высшей математики. Здесь практически не рассматриваются аналитические методы решения, занимающие в обычных курсах львиную долю учебного времени. Основное внимание уделено численным методам решения задачи Коши, включая методы решения жестких систем, а также качественным аспектам теории дифференциальных уравнений. В главе представлены традиционные приложения качественной теории — модели конкурирующих видов и экономических систем.

В главе 5, где собраны задачи теории вероятностей, дано много полезной справочной информации о наиболее часто используемых распределениях, их числовых характеристиках и свойствах, приведено множество графиков.

Последняя глава посвящена статистическим методам. Здесь описаны методы решения основных задач анализа данных — от простейших описательных статистик и построения гистограмм до факторного анализа и проверки статистических гипотез, приведено много полезной справочной информации. В процессе решения задач этой главы читатель не только научится оценивать параметры распределений, но и познакомится с методами статистического моделирования и численного эксперимента.

В приложении 1 представлены примеры решения задач оптимизации в Mathcad.

В приложении 2 приведены варианты индивидуальных заданий для группы из 20 студентов.

Изложение материала каждой главы независимо. Поэтому, если читатель хочет научиться решать задачи определенного раздела математики, он может ограничиться изучением только нужной ему главы.

Книга адресована широкому кругу читателей: студентам, преподавателям вузов, специалистам, использующим пакет в практической работе.

Преподаватели математических дисциплин найдут в практикуме методически полностью проработанные компьютерные занятия. Авторы предполагают, что для многих коллег материал книги послужит творческим импульсом для подготовки собственных учебных курсов на базе универсальных математических пакетов.

Преподаватели смежных дисциплин, использующих математические модели, смогут расширить круг рассматриваемых задач, поскольку компьютер частично снимает ограничения на сложность исследуемых моделей.

Студенты инженерных вузов найдут в книге описание практически всех математических задач, встречающихся в инженерных расчетах.

Студенты экономических вузов, поручив компьютеру выполнение рутинных вычислений, смогут сосредоточиться на анализе содержательных, качественных свойств исследуемых моделей.

Пользователи получают сборник примеров решения стандартных математических задач в среде Mathcad.

В этом издании добавлены задачи, связанные с вычислениями с комплексными числами: арифметика комплексных чисел, элементарные функции комплексного переменного, вычисления с матрицами, элементы которых — комплексные числа, операционный метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, несколько изменена структура книги.

Авторы приносят глубокую благодарность проф. М.И. Шабунину и проф. Е.М. Воробьеву за полезные замечания и доброжелательное отношение к данной работе, И.П. Боровикову, директору корпорации СофтЛайн, и С.Б. Зайцевой, руководителю научного отдела корпорации — за предоставленную для работы версию пакета. (Корпорация СофтЛайн (127087, Москва, а/я 362, root@softline.msk.ru, <http://www.softline.ru>) является эксклюзивным дистрибьютером Mathcad в России.) Авторы считают своим приятным долгом выразить особую благодарность А.Н. Канатникову, вдумчивые замечания которого были им чрезвычайно интересны и полезны.