

Министерство образования и науки Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.П. Осиленкер

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ  
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

*Учебно-практическое пособие*

Москва 2015

УДК 512.91 (07)  
ББК 22.143я73  
О-45

**Рецензенты:**

доктор физ.-мат. наук, профессор *А.В. Петров*,  
Российский государственный геологоразведочный университет;  
доктор физ.-мат. наук, профессор *И.М. Петрушко*,  
Национальный исследовательский университет МЭИ

Под редакцией *А.Ю. Лемина*

**Осиленкер, Б.П.**

О-45 Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б.П. Осиленкер ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. Москва : НИУ МГСУ, 2015. 128 с.

ISBN 978-5-7264-1186-6

Содержит основные теоретические положения по функциональному анализу. Материал дается в виде определений, теорем и формул, а затем проводится разбор решений типовых задач. Пособие адресовано студентам технического вуза. Основное внимание уделено задачам технического и вычислительного характера и задачам, позволяющим глубже уяснить теоретическое понятие и результат.

Для студентов специалитета, обучающихся по специальности 230401.65 Прикладная математика. Может быть использовано инженерами и математиками-прикладниками для самостоятельного изучения курса «Функциональный анализ».

**УДК 512.91 (07)**  
**ББК 22.143я73**

ISBN 978-5-7264-1186-6

© НИУ МГСУ, 2015

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА .....	4
1.1. Понятие метрического пространства. Полнота метрических пространств .....	4
1.2. Множества в метрических пространствах .....	14
1.3. Операторы и функционалы в метрических пространствах .....	22
2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА .....	26
2.1. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства .....	26
2.2. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы в гильбертовых пространствах .....	34
2.3. Ряды Фурье по ортогональным системам в гильбертовом пространстве. Построение элемента наилучшего приближения .....	42
3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ .....	50
3.1. Непрерывность, ограниченность и норма линейного оператора .....	50
3.2. Спектр линейного оператора .....	56
3.3. Вполне непрерывные операторы в линейных нормированных пространствах. Вполне непрерывные самосопряженные операторы .....	60
3.4. Обобщенные функции .....	65
4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И К ЗАДАЧЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ .....	76
4.1. Линейные интегральные уравнения .....	76
4.2. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода .....	77
4.3. Метод функций Грина для краевой задачи Штурма — Лиувилля .....	81
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ .....	90
Задачи к главе 1 .....	90
Задачи к главе 2 .....	97
Задачи к главе 3 .....	108
Задачи к главе 4 .....	121
Библиографический список .....	130