

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА"

А.Н. ПЛОТНИКОВ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 519.21
ББК 22.171
П 396

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ф. К р у т о в
д-р техн. наук, проф. В. Д. Ю ш и н

Плотников А. Н.
П 396 **Статистическое моделирование и системный анализ технологи-
ческих процессов:** учеб. пособие / А. Н. Плотников. – Самара: Изд-
во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 155 с.

ISBN 978-5-7883-0687-2

Содержит краткое изложение вероятностных основ статистических методов в контексте их практического использования при анализе качества и надежности продукции машиностроительного производства. В главе 1 излагаются общие вероятностные основы и рассмотрены наиболее употребительные выборочные статистики нормальных совокупностей, в том числе порядковые статистики. Основная часть посвящена системам случайных величин и типам их взаимодействий. В главе 2 даны основы дисперсионного анализа и теории планирования эксперимента. В главах 3-5 рассмотрены модели функционирования контрольных, измерительных процессов, основы теории массового обслуживания и схемы статистического регулирования технологических процессов. В качестве иллюстраций приведены примеры статистических экспериментов по методу Монте-Карло, реализованные в пакете Mathcad-2001, которые могут быть использованы для аудиторного и самостоятельного лабораторного практикума по различным приложениям теории вероятностей.

Пособие предназначено для студентов специальностей «Стандартизация и сертификация» и «Управление качеством», а также других специальностей.

УДК 519.21
ББК 22.171

ISBN 978-5-7883-0687-2

© Плотников А. Н.
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Теоретические основы статистического моделирования случайных процессов.....	10
1.1. Преобразования случайных величин и сущность метода Монте-Карло.....	10
1.2. Системы случайных величин.....	13
1.3. Закон совместного распределения выборочных значений.....	27
1.4. Выборочные оценки параметров распределения.....	30
Глава 2. Основы теории планирования эксперимента.....	44
2.1. Факторы эксперимента. Понятие об эффекте фактора.....	44
2.2. Аппарат дисперсионного анализа.....	48
2.3. Планы со смешиванием эффектов и дробные многофакторные планы.....	58
2.4. Планы эксперимента для исследования поверхности отклика.....	69
Глава 3. Системный анализ контрольных и измерительных процессов.....	81
3.1. Модель функционирования системы контроля.....	81
3.2. Принцип накопления и анализа информации. Оценка эффективности контроля.....	87
3.3. Сущность процесса измерения и основные элементы измерительной системы.....	92
3.4. Модель функционирования измерительной системы.....	95
3.5. Модель функционирования измерительной системы при приемке по допуску.....	100
Глава 4. Основы теории надежности технологических и информационных систем.....	102
4.1. Потоки случайных событий и их свойства.....	102
4.2. Парадокс инспекции и смежные вопросы.....	109
4.3. Очереди и задачи обслуживания.....	112

4.4. Статистическая оценка параметра показательного закона.....	122
---	-----

Глава 5. Статистическое моделирование случайных процессов.....	125
--	-----

5.1. Модели процессов с непрерывным приращением.....	125
--	-----

5.2. Анализ схем статистического регулирования	129
--	-----

5.3. Выборочные оценки числовых индексов воспроизводимости.....	138
---	-----

Список литературы.....	144
------------------------	-----

Приложения.....	145
-----------------	-----

Приложение I. Алгоритмы Монте-Карло, экспериментальные и расчетные значения инвариантов структуры серий в последовательной выборке.....	145
---	-----

Приложение II. Таблица распределения Кохрэна.....	151
---	-----

Приложение III. Таблица распределения выборочного размаха.....	153
--	-----

ВВЕДЕНИЕ

1. Исходным понятием теории вероятностей является *случайное событие* – событие, которое может произойти или не произойти при воспроизводимой совокупности условий опыта (испытания, наблюдения). Например, появление орла при бросании монеты, выпадение 11 очков при бросании двух игральных костей, попадание в поле допуска размера очередной детали с автоматической производственной линии, существенное улучшение состояния у группы больных после лечения определенным препаратом и т.д. Из перечисленных примеров видно, что каждое событие обладает некоторой степенью возможности. В примере с монетой и игральными костями сразу можно решить, что выпадение орла более возможно, чем выпадение 11 очков при бросании двух игральных костей, а для анализа стабильности технологического процесса или действия лекарственного препарата необходимо иметь фактические результаты наблюдений. С понятием случайного события связано другое фундаментальное понятие теории вероятностей – понятие *случайной величины* (СВ). Под случайной величиной понимается величина, которая в опыте с несколькими возможными исходами может принимать то или иное значение. Например, число очков при бросании игральной кости, частота появления «орла» в серии повторных опытов с монетой, фактическое количественное значение параметра при контроле и испытаниях промышленной продукции, очередной результат в серии повторных измерений и т.д. Законом распределения случайной величины называется любое правило (функция), позволяющее однозначно определить вероятности возможных значений случайной величины. Наиболее просто обстоит дело, когда множество возможных значений случайной величины конечно либо счетно и может быть отождествлено с пространством событий. Например, появление любого из чисел от «1» до «6» при бросании игральной кости равновероятно с вероятностью $p = \frac{1}{6}$; множество возможных значений частоты появления «орла» при трех бросаниях моне-

ты составляет $v = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}$ с вероятностями $p(0) = p(1) = \frac{1}{8}$, $p\left(\frac{1}{3}\right) = p\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8}$.

Очень важную роль при анализе СВ играют ее *числовые характеристики*, позволяющие определить ее положение на числовой оси, величину рассеивания – степень случайности и форму рассеяния. Важнейшей числовой характеристикой СВ является ее *среднее значение* или *математическое ожидание*, определяемой как

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \mu_X.$$

Если под $p(x)$ понимать дискретное распределение единичной массы на тонком невесомом стержне, то среднее значение можно интерпретировать как x – координату центра масс такой системы. Рассеивание СВ около своего среднего значения характеризуется дисперсией

$$D[X] = M[X - \mu_X]^2 = M[X^2] - \mu_X^2 = \sum_k p_k x_k^2 - \mu_X^2.$$

В механической интерпретации $D[X]$ есть момент инерции стержня переменной плотности относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку $x = M[X]$. Для большей наглядности рассеивание СВ характеризуют *стандартным* или *средним квадратичным отклонением* (СКО) $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$, которое имеет такую же размерность, что и сама СВ. Для более детального описания СВ используют также *асимметрию* $S_x = \frac{M[X - \mu_X]^3}{(D[X])^{3/2}}$ и *эксцесс* $E_x = \frac{M[X - \mu_X]^4}{(D[X])^2} - 3$.

Для симметричного относительно μ_X плотности распределения $S_x = 0$, $S_x > 0$, если распределение быстрее стремится к нулю слева от μ_X , и $S_x < 0$ – если справа. Эксцесс характеризует рассеивание СВ около среднего значения по сравнению с нормальной СВ, у которой $E_x = 0$. Из определения $M[X]$ и $D[X]$ вытекают их следующие свойства: