

**Кемеровская государственная
медицинская академия**

**ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА
II**

Математический анализ

Кемерово - 2007

ГОУ ВПО «Кемеровская государственная медицинская академия
Федерального агентства по здравоохранению и социальному развитию»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА II

Под редакцией доц. В. И. Бухтояровой

Математический анализ

Методические указания и задания контрольной работы №2
для студентов I курса заочного отделения факультета
«Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)»

Кемерово - 2007

УДК 51(075)-057.875

Высшая математика. Часть II. Математический анализ / Под ред. к.ф.-м.н. доц. В.И. Бухтояровой // Кемерово, КемГМА. – 2007. – 87 с.

Методические указания и контрольные задания для студентов I курса заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)».

Составители:

В.И. Бухтоярова, В.М. Гущина, О.В. Головкин, Г.Н. Дадаева,
С.Н. Песчанская, Л.К. Равинг, Е.В. Салтанова.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Содержание учебной программы	5
Литература	6
Вопросы для подготовки к зачету	7
Общие методические указания	9
Правила оформления контрольной работы	10
Краткие теоретические сведения и примеры решения задач	10
Контрольная работа №2	70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики для студентов заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)» ставит своей целью формирование у студентов базы знаний по высшей математике необходимой и достаточной для профессиональной деятельности. Необходимый уровень знаний задается государственным стандартом. Достаточность базы знаний обеспечивается структурой преподавания, направленной на освоение теоретического материала и практическое применение полученных знаний для решения задач экономического содержания.

Методические указания содержат необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы для решения заданий контрольной работы. На примерах подробно разбираются решения типовых задач по математическому анализу.

Методические указания и контрольные задания подготовлены на основе коллективного опыта сотрудников кафедры медицинской и биологической физики и высшей математики Кемеровской государственной медицинской академии.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Введение в анализ

Переменная величина и область ее изменения. Понятие функции, ее определение, частное значение. Способы задания функции. График функции. Важнейшие классы функций. Понятие обратной функции.

Предел функции

Предел последовательности. Предел функции. Определение предела и его геометрический смысл для случаев: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Односторонние пределы и ограниченность функции.

Предел многочлена при стремлении аргумента к бесконечности. Неопределенные выражения. Понятие первого замечательного предела.

Второй замечательный предел, натуральные логарифмы. Предел показательной-степенной функции. Классификация разрывов функции, исследование функции на непрерывность. Свойства и теоремы о непрерывных функциях.

Дифференциальные исчисления

Дифференцирование функции одной переменной. Задача о касательной к кривой. Определение производной, ее обозначения. Производные элементарных функций, теорема о производной обратной функции и ее геометрический смысл. Таблица производных. Правила вычисления производных. Теорема о производной сложной функции. Производные неявных функций. Производная показательной-степенной функции. Производные высших порядков. Теорема Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Теоремы о средних значениях: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.

Исследование функций на экстремум с помощью производных первого и второго порядков. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

Функции многих переменных

Функции двух и трех независимых переменных. Способы задания функций двух и трех независимых переменных. Частные производные.

Дифференциал функции

Дифференциал функции, его определение и геометрический смысл. Основные формулы и правила вычисления дифференциала, инвариантность формы первого дифференциала. Понятие полного дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

Интегральные исчисления

Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла, его свойства. Основные формулы интегрирования. Простейшие способы интегрирования.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Простейшие правила интегрирования. Интегрирование заменой переменной в неопределенном и определенном интегралах. Два вида подстановок. Интегрирование простейших

Студенты, которые не представят вовремя контрольную работу, не будут допущены к ее защите в срок, установленный для группы. На защите студент должен быть готов дать пояснения по решению заданий контрольной работы. Если студент не может защитить выполненную работу, то ему может быть предложен другой вариант контрольной работы (по усмотрению преподавателя).

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольную работу необходимо выполнять в тетради, оставляя поля (6 см) для замечаний рецензента.
2. На титульном листе указать наименование кафедры и дисциплины; факультет, курс, номер группы; номер контрольной работы и варианта; фамилию, имя, отчество без сокращений; номер зачетной книжки.
3. Условия заданий необходимо написать полностью, без сокращений.
4. Решения заданий необходимо сопровождать пояснениями. Расчеты проводить, соблюдая правила приближенных вычислений.
5. При построении графиков функций соблюдать масштаб по осям координат.
6. В конце каждого задания необходимо записать ответ.
7. В конце контрольной работы указать используемую литературу (автор, название, год издания).

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Способы задания функции

Функциональной зависимостью называется зависимость, при которой каждому значению величины X из множества её значений X ($x \in X$) соответствует определенное значение величины y ($y \in Y$), что означает, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Множество X называется областью определения функции, множество Y - множеством значений функции.

Например, площадь квадрата $S = a^2$ является функцией его стороны a : $S = f(a)$; объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - функцией его радиуса R : $V = f(R)$.

Функциональная зависимость может быть задана аналитически, графически и с помощью таблицы.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю и обозначается

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Для обозначения производной используются так же символы $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Нахождение производных называется действием дифференцирования.

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную во всех точках некоторого промежутка, она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Физический смысл производной функции

Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый процесс (биологический, физический, экономический, социальный и др.), то ее производная $y'(x)$ имеет смысл мгновенной скорости этого процесса (при конкретном значении аргумента x_0).

Так, производная пути $S = f(t)$ по времени есть скорость движущегося тела в момент времени t_0 есть $v(t_0) = S'(t_0)$; производная объема произведенной продукции $u = u(t)$ есть производительность труда $z(t)$: $z = u'(t)$ и т.п.

Вторая производная функции, описывающей некоторый процесс, имеет смысл мгновенного ускорения этого процесса.

Например, вторая производная пути по времени есть мгновенное ускорение тела: $S''(t) = \frac{d^2 S}{dt^2} = a(t)$.

По определению (2.1) производной найдены производные основных элементарных функций, которые являются основой для нахождения производных сложных функций.

$$F'_y(x; y) = [x = const] = (x^2 + y^2 - xy)'_y = \\ = 0 + 2y - x \cdot 1 = 2y - x.$$

3. Запишем выражение производной неявной функции согласно формуле (2.3):

$$y'_x = -\frac{2x - y}{2y - x}.$$

$$\text{Ответ: } y'_x = -\frac{2x - y}{2y - x}.$$

ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике.

В спектр этих функций входят линейные, степенные, показательные, экспоненциальные, логарифмические функции. При описании периодичности экономических процессов используются и тригонометрические функции. Наиболее часто в экономике используются следующие функции:

1. Функция спроса на некоторый товар – зависимость объема (количества) пользующегося спросом товара q от его цены p : $q = q(p)$;

2. Функция предложения – зависимость количества предлагаемых на рынке товаров и услуг S от их цены p : $S = S(p)$.

Рассматривая в одной системе координат кривые спроса $q(p)$ и предложения $S(p)$, можно установить равновесную (рыночную) цену товара.

3. Производственные функции - зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов:

а) Функция выпуска продукции $u = u(x)$ – зависимость объема u произведенной продукции от объема ресурсов x .

б) Функция издержек $C = C(q)$ – зависимость издержек производства C от объема продукции q .

в) Функция дохода $R = R(q)$ – доход (выручка) от реализованной продукции q : $R = p \cdot q$. Здесь p – цена единицы продукции.

г) Функция прибыли $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ и другие функции.

Производные функции в экономике

1. Пусть функция $u = u(t)$ выражает зависимость объема произведенной продукции u от времени.

Производная функции при переходе через точку $x = 0$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой минимума. Т.к. в промежутках $(0;1)$ и $(1;\infty)$ $y'(x) > 0$, то данная функция возрастает в этих промежутках, а в промежутках $(-\infty;-1)$ и $(-1;0)$ данная функция убывает, т.к. $y'(x) < 0$.

7. Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость и на наличие точек перегиба с помощью производной второго порядка

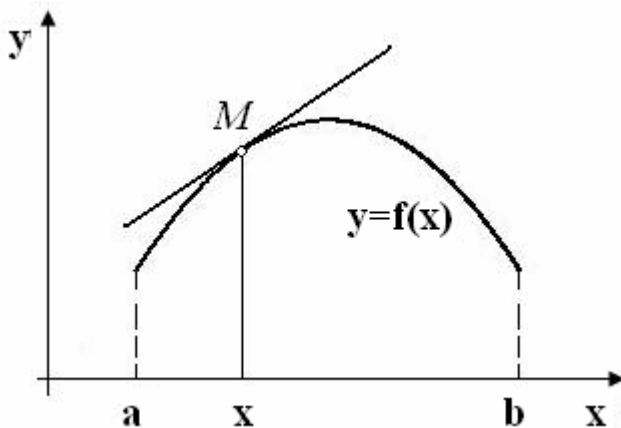


Рис. 3

Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой в интервале (a, b) , если она лежит ниже касательной, проведенной к этой кривой в любой ее точке $M(x; y)$, абсцисса которой удовлетворяет условиям $a < x < b$ (рис.3).

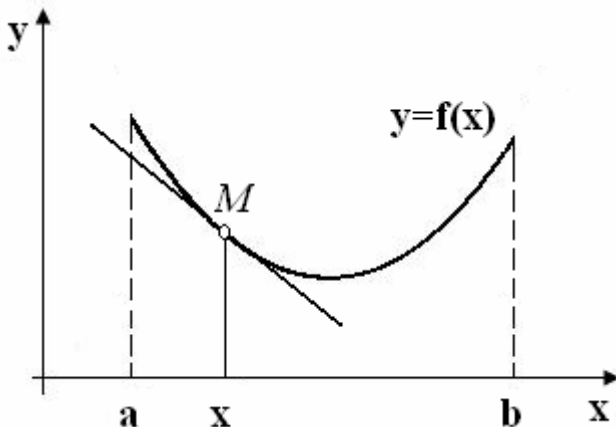


Рис.4

Кривая $y = f(x)$ называется вогнутой в интервале (a, b) , если она лежит выше касательной, проведенной к этой кривой в любой ее точке $M(x; y)$, абсцисса которой удовлетворяет условиям $a < x < b$ (рис.4).

Кривая $y = f(x)$ выпукла в интервале (a, b) , если при всех значениях аргумента x этого интервала производная второго порядка $f''(x) < 0$.

Кривая $y = f(x)$ вогнута в интервале (a, b) , если при всех значениях аргумента x этого интервала производная второго порядка $f''(x) > 0$.

Кривая $y = f(x)$ может быть выпукла или вогнута не во всей области определения этой функции. Область определения часто распадается на промежутки выпуклости и вогнутости. Точки, отделяющие друг от друга промежутки выпуклости и вогнутости, называются точками перегиба.

9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд, члены которого являются степенными функциями, называется степенным рядом:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (9.1)$$

Числа $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность тех значений x , при которых степенной ряд сходится.

Например, для ряда $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, у которого $|x| = q < 1$, область сходимости $(-1; 1)$, т.к. его можно рассматривать как сходящийся геометрический ряд со знаменателем $q = x$.

Теорема Абеля. 1) Если степенной ряд сходится при значении $x = x_0 \neq 0$ (отличном от нуля), то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$. 2) Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится. Это число называется радиусом сходимости, а интервал $(-R; R)$ — интервалом сходимости. Можно показать [1, стр.381], что

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (9.2).$$

У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку $R = 0$, а у некоторых рядов во всю ось Ox ($R = \infty$).

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Вычислите пределы функций; п. г) вычислите, воспользовавшись правилом Лопиталя:

1.1

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 + 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+1} - 3}{x^2 + 2x - 3};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}.$

1.2

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 13x}{3x^4 + 7};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}.$

1.3

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 9}{5x^4 - 3x^2 + 8};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{x^2 + 2x - 3};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$

1.4

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x^2 + 7x - 9};$

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 2x - 8};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 4x)^2}{16x^2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3 \ln x^2}.$

6. Вычислите интегралы:

6.1

$$\text{a)} \int_0^1 x e^x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{в)} \int \frac{x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 4x} dx.$$

6.2

$$\text{a)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$\text{б)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2};$$

$$\text{в)} \int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

6.3

$$\text{a)} \int_1^2 (3x - 4) \ln x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x};$$

$$\text{в)} \int \frac{6x + 1}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

6.4

$$\text{a)} \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$\text{б)} \int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2 - 7} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

6.5

$$\text{a)} \int_1^3 (x^2 - 3x) \ln x dx; \quad \text{б)} \int_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16 + x^2}};$$

$$\text{в)} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

6.6

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - x^2) \cos 2x dx; \quad \text{б)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x};$$

$$\text{в)} \int \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} dx.$$

6.7

$$\text{a)} \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8 - x)^2}}$$

$$\text{в)} \int \frac{3x + 2}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

6.8

Отпечатано редакционно-издательским отделом
ГОУ ВПО КемГМА Росздрава с готового оригинал-макета

650029, Кемерово,
ул. Ворошилова, 22а.
Тел./факс. +7(3842)734856;
epd@kemsma.ru



Подписано в печать 08.06.2007.
Гарнитура таймс. Тираж 100 экз.
Формат 21×30/2. У.п.л. 5,1.
Печать трафаретная

Требования к авторам см. на <http://www.kemsma.ru/rio/forauth.shtml>
Лицензия ЛР №21244 от 22.09.97