

84 ELEMENTARMATHEMATIK 7/1

VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL II: GEOMETRIE.

VORLESUNG

GEHALTEN IM SOMMERSEMESTER 1908

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

LEIPZIG 1909.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.



17 B 107

Vorwort.

In dem Vorwort zu Teil I der vorliegenden Vorlesungen (Arithmetik, Algebra, Analysis) bezeichnete ich es noch als zweifelhaft, ob der der Geometrie gewidmete Teil II so bald werde erscheinen können. Nun ist es doch gelungen, ihn fertig zu stellen, wozu die Arbeitskraft von Herrn Hellinger, wie ich gern hervorhebe, ihr wesentliches Teil beigetragen hat.

Über Entstehung und Zweck der ganzen Vorlesungsserie habe ich hier dem, was in der Vorrede von I gesagt ist, nichts Besonderes mehr hinzuzufügen. Wohl aber scheint ein Wort nötig über die neue Form, welche dieser zweite Teil angenommen hat.

Diese Form ist in der Tat eine ganz andere wie bei Teil I. Ich habe mich entschlossen, vor allen Dingen einen Gesamtüberblick über das Gebiet der Geometrie zu geben, in dem Umfange, wie ich ihn jedem Lehrer an einer höheren Schule wünschen möchte*); die Erörterungen über den geometrischen Unterricht wurden also zurückgedrängt und zum Schluß, soweit noch Raum blieb, nun aber im Zusammenhange, gegeben.

In einem gewissen Maße hat bei der so charakterisierten Neuordnung der Wunsch mitgewirkt, nicht in eine zu stereotype Form zu verfallen. Es lassen sich aber auch wichtige innere Gründe anführen. Wir haben in der Geometrie keine solchen einheitlichen, dem allgemeinen Stande der Wissenschaft entsprechenden Lehrbücher, wie wir sie für Algebra und Analysis dank dem Vorbilde der französischen Cours besitzen; vielmehr findet man hier diese, dort jene einzelne Seite des vielumfassenden Gegenstandes dargestellt, wie sie gerade von der einen oder anderen Gruppe von Forschern zur Entwicklung gebracht worden ist. Demgegenüber schien es, bei den pädagogischen und allgemein-wissenschaftlichen Zwecken, die ich verfolge, ein wesentliches Erfordernis, eine mehr einheitliche Zusammenfassung zu versuchen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß die beiden einander ergänzenden nun vollendet vorliegenden Teile der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ in der Lehrerwelt dieselbe freundliche Aufmerksamkeit finden mögen, wie die im Vorjahre von Herrn Schimmack und mir herausgegebenen Vorträge über die Organisation des mathematischen Unterrichts.

Göttingen, Weihnachten 1908.

Klein.

*) Wer sich für abstraktere Fragen interessiert, sei auf meine schon früher autographierten Vorlesungen über „höhere Geometrie“ verwiesen (1893, neuer Abdruck 1907).

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

	Seite
Zweck und Form der Vorlesung	1
Die „Fusionsbestrebungen“	4

Erster Hauptteil: Die einfachsten geometrischen Gebilde.

I. Strecke, Flächeninhalt und Rauminhalt als relative Größen . .	5
Definition durch Determinanten; Deutung der Vorzeichen	6
Einfachste Anwendungen (Doppelverhältnis)	11
Inhalt geradliniger Polygone	14
Krummlinig begrenzte Flächenstücke.	19
Theorie des Amslerschen Polarplanimeters	22
Inhalte von Polyedern; Kantengesetz und einseitige Polyeder von Moebius	33

II. Das Graßmannsche Determinantenprinzip für die Ebene . . .	42
Linienteile (Vektoren)	43
Anwendung in der Statik starrer Systeme	45
Klassifikation geometrischer Größen nach ihrem Verhalten bei Transformation der rechtwinkligen Koordinaten	50
Anwendung dieses Prinzips auf unsere Elementargrößen	52
Speziell: Äquivalenz von Kräftepaar und Dreiecksinhalt	55

III. Das Graßmannsche Prinzip für den Raum	58
Linien- und Ebenenteil	59
Anwendung in der Statik starrer Körper	62
Dyname am starren Körper und Nullsystem	67
Geometrische Veranschaulichung des Nullsystems	71
Zusammenhang mit der Schraubentheorie	76

IV. Weitere Klassifikation der einfachsten Raumgrößen nach ihrem Verhalten bei rechtwinkligen Koordinatentransformationen . . . 80

Allgemeines über orthogonale Transformation der rechtwinkligen Parallelkoordinaten	80
Ableitung einiger Transformationsformeln	87
Kräftepaar und freie Plangröße als äquivalente Gebilde	91
Freier Linienteil und freie Plangröße („polarer“ und „axialer“ Vektor)	94
Skalare erster und zweiter Art	98
Grundzüge einer rationalen Vektoralgebra	100

V. Erzeugnisse der somit eingeführten Grundgebilde 107

Erzeugnisse von Punkten (Kurven, Flächen, Punktmengen)	108
Vom Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie	110
Die projektive Geometrie und das Prinzip der Dualität	114
Plückers analytische Auffassung und Weiterbildung des Dualitätsprinzipes (Geradenkoordinaten)	119
Graßmanns Ausdehnungslehre; insbesondere mehrdimensionale Geometrie.	124
Skalar- und Vektorfelder; rationale Vektoranalysis	130

Zweiter Hauptteil: Die geometrischen Transformationen.

Allgemeines über Transformationen und ihre analytische Darstellung	139
--	-----

I. Affine Transformationen 142

Analytische Definition und Grundeigenschaften	142
Geometrische Charakterisierung der Transformation	148
Anwendung auf die Theorie des Ellipsoids	153
Parallelprojektion einer Ebene in eine andere	157
Axonometrische Abbildung des Raumes (Affinität mit verschwindender Determinante)	161
Der Fundamentalsatz von Pohlke	169

II. Projektive Transformationen 175

Analytische Definition; Einführung homogener Koordinaten	175
Geometrische Definition: Jede Kollineation ist eine Projektivität	182
Verhalten der Grundgebilde bei Projektivitäten	187
Zentralprojektion des Raumes in eine Ebene (Projektivität mit verschwindender Determinante)	194
Reliefperspektive	195
Anwendung des Projizierens zur Ableitung von Kegelschnitteigenschaften	199

	Seite
III. Höhere Punktttransformationen.	202
1. Transformation durch reziproke Radien	203
Die Peaucelliersche Geradführung	208
Stereographische Projektion der Kugel	210
2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen	212
Die Merkatorprojektion	213
Die Tissotschen Sätze	215
3. Die allgemeinsten eindeutigen stetigen Punktttransformationen.	218
Begriff der „Analysis situs“	219
Geschlecht und Zusammenhang von Flächen	221
Der Eulersche Polyedersatz	224
IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelementes	225
1. Die dualistischen Transformationen	225
2. Berührungstransformationen	230
3. Beispiele	235
Gestalt algebraischer Ordnungs- und Klassenkurven	236
Anwendung der Berührungstransformationen auf Zahnradtheorie	238
V. Anhang: Die Imaginärtheorie.	242
Anlaß und Zweck der Einführung imaginärer Elemente	242
Die imaginären Kreispunkte und der imaginäre Kugelkreis	246
Imaginärtransformation	249
v. Staudts Deutung sich selbst konjugierter imaginärer Gebilde durch reelle Polarsysteme	251
v. Staudts volle Deutung einzelner imaginärer Elemente	258
Beispiele und weitere Ausführungen hierzu	266

Dritter Hauptteil: Systematik und Grundlegung der Geometrie.

I. Systematik	271
1. Überblick über die Gliederung der Geometrie.	272
Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip.	272
Cayleys Grundsatz: projective geometry is all geometry	281
2. Exkurs über Invariantentheorie der linearen Substitutionen	282
Die Systematik der Invariantentheorie	284
Erläuterung an einfachen Beispielen	293
3. Anwendung der Invariantentheorie auf Geometrie	301
Deutung der Invariantentheorie von $n+1$ Variablen in der affinen Geometrie des R_{n+1} mit festem Nullpunkt	301
Ihre Deutung in der projektiven Geometrie des R_n	305
Speziell: Einordnung des Begriffes „Doppelverhältnis“	307