

УДК 519.2  
ББК 22.17  
Д42

*Серия основана в 2010 г.*

**Джонсон Н. Л.**

Д42 Одномерные дискретные распределения / Н. Л. Джонсон, С. Коц, А. У. Кемп ; пер. 2-го англ. изд. — 5-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2023. — 563 с. — (Теория вероятностных распределений). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-652-0

Приводится ряд общих сведений из математического анализа и теории вероятностных распределений, а также необходимые алгоритмы компьютерной генерации одномерных дискретных случайных величин. Вводятся важные общие классы одномерных дискретных величин, включая семейства смешанных и составных случайных величин. Подробно рассмотрены свойства семейств биномиальных, пуассоновских, отрицательных биномиальных, геометрических, гипергеометрических, логарифмических распределений. Менее подробно рассмотрено несколько десятков связанных с ними семейств распределений дискретных случайных величин.

**УДК 519.2  
ББК 22.17**

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Одномерные дискретные распределения / Н. Л. Джонсон, С. Коц, А. У. Кемп ; пер. 2-го англ. изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 559 с. : ил. — (Теория вероятностных распределений). — ISBN 978-5-94774-471-2.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

Copyright © 1993 by John Wiley & Sons, Inc.  
All Rights Reserved.  
This EBook is published under license  
with the original publisher John Wiley & Sons, Inc.  
© Русский перевод. Лаборатория знаний, 2021

**ISBN 978-5-93208-652-0**

# Оглавление

<b>Предисловие редактора перевода</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Предисловие авторов</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Глава 1. Предварительные замечания</b> . . . . .	<b>9</b>
Введение . . . . .	9
А. Предварительные замечания об используемом математическом аппарате . . . . .	10
А1. Факториальные и комбинаторные соотношения . . . . .	10
А2. Гамма- и бета-функции . . . . .	12
А3. Вычисления методом конечных разностей . . . . .	16
А4. Дифференциальное исчисление . . . . .	19
А5. Неполные гамма- и бета-функции, а также другие функции, связанные с гамма-функцией . . . . .	21
А6. Гауссовские гипергеометрические функции . . . . .	24
А7. Вырожденные гипергеометрические функции (функции Куммера) . . . . .	26
А8. Обобщенные гипергеометрические функции . . . . .	29
А9. Числа и многочлены Бернулли и Эйлера . . . . .	31
А10. Интегральные преобразования . . . . .	33
А11. Ортогональные преобразования . . . . .	34
А12. Различные замечания и комментарии . . . . .	36
В. Предварительные замечания вероятностного и статистического характера . . . . .	38
В1. Основные свойства вероятности . . . . .	38
В2. Случайные величины . . . . .	41
В3. Теорема Байеса . . . . .	44
В4. Математическое ожидание . . . . .	45
В5. Моменты и производящие функции моментов . . . . .	46
В6. Семиинварианты и производящие функции семиинвариантов . . . . .	50
В7. Смешанные моменты и их семиинварианты . . . . .	52
В8. Характеристические функции . . . . .	53
В9. Производящие функции . . . . .	55

	B10. Порядковые статистики . . . . .	57
	B11. Усечение и цензурирование . . . . .	58
	B12. Смешанные распределения . . . . .	60
	B13. Дисперсия функции . . . . .	61
	B14. Геометрическая интерпретация . . . . .	63
	B15. Методы статистического вывода . . . . .	63
	C. Порождение на компьютере одномерных дискретных случайных величин . . . . .	69
	C1. Замечания общего характера . . . . .	69
	C2. Методы порождения случайных величин с произвольным распределением . . . . .	70
	C3. Биномиальные случайные величины . . . . .	73
	C4. Пуассоновские случайные величины . . . . .	74
	C5. Отрицательно биномиальные случайные величины . . . . .	76
	C6. Гипергеометрические случайные величины . . . . .	77
	C7. Логарифмические случайные величины . . . . .	78
Глава	2. <b>Семейства дискретных распределений</b> . . . . .	79
	1. Решетчатые распределения . . . . .	79
	2. Распределения типа степенного ряда . . . . .	80
	2.1. Обобщенные распределения типа степенного ряда . . . . .	80
	2.2. Модифицированные распределения типа степенного ряда . . . . .	84
	3. Системы уравнений в конечных разностях . . . . .	88
	3.1. Семейство распределений Катца и его обобщения . . . . .	88
	3.2. Семейство распределений Орда . . . . .	92
	4. Семейства распределений Кемпа . . . . .	97
	4.1. Обобщенные гипергеометрические распределения . . . . .	97
	4.2. Распределения с обобщенной гипергеометрической производящей функцией факториальных моментов . . . . .	105
	5. Распределения, основанные на разложении Лагранжа . . . . .	109
	5.1. Мультипликативный процесс Оттера . . . . .	109
	5.2. Лагранжевы распределения . . . . .	110
	5.3. Распределения Гулда и Абеля . . . . .	114
	6. Распределения типа факториального ряда . . . . .	116
Глава	3. <b>Биномиальное распределение</b> . . . . .	119
	1. Определения . . . . .	119
	2. Исторические замечания . . . . .	120
	3. Моменты . . . . .	121
	4. Свойства . . . . .	123
	5. Порядковые статистики . . . . .	127
	6. Приближения, границы и преобразования . . . . .	128
	6.1. Приближения . . . . .	128
	6.2. Оценка вероятностей сообщений . . . . .	134
	6.3. Преобразования . . . . .	136
	7. Вычисления и таблицы . . . . .	137
	8. Статистический анализ . . . . .	139

	8.1. Выбор модели . . . . .	139
	8.2. Точечное оценивание . . . . .	139
	8.3. Доверительные интервалы . . . . .	144
	8.4. Проверка модели . . . . .	147
	9. Характеризация распределения . . . . .	148
	10. Приложения . . . . .	149
	11. Усеченные биномиальные распределения . . . . .	151
	12. О других родственных распределениях . . . . .	153
	12.1. Предельные формы . . . . .	153
	12.2. Пуассоновско-биномиальная, лексиановская схемы и схема Кулиджа . . . . .	154
	12.3. Биномиально-биномиальные распределения лагранже- вого типа . . . . .	158
	12.4. Взвешенные биномиальные распределения . . . . .	161
	12.5. Псевдо-биномиальные случайные величины . . . . .	163
	12.6. Коррелированные биномиальные случайные величины . . . . .	164
Глава	4. <b>Пуассоновское распределение</b> . . . . .	167
	1. Определение . . . . .	167
	2. Исторические замечания . . . . .	167
	3. Моменты . . . . .	172
	4. Свойства . . . . .	174
	5. Приближения, границы и преобразования . . . . .	177
	6. Вычисления и таблицы . . . . .	180
	7. Оценивание . . . . .	182
	7.1. Выбор модели . . . . .	182
	7.2. Точечное оценивание . . . . .	183
	7.3. Доверительные интервалы . . . . .	185
	7.4. Проверка модели . . . . .	188
	8. Характеризации . . . . .	188
	9. Приложения . . . . .	194
	10. Усеченные и искаженные распределения Пуассона . . . . .	197
	10.1. Усечение слева . . . . .	197
	10.2. Усечение справа и двустороннее усечение . . . . .	200
	10.3. Искаженные распределения Пуассона . . . . .	202
	11. Распределение пуассоновски остановленных сумм . . . . .	203
	12. О других родственных распределениях . . . . .	205
	12.1. Нормальное распределение . . . . .	205
	12.2. Гамма-распределение . . . . .	205
	12.3. Суммы и разности пуассоновских величин . . . . .	206
	12.4. Гипер-пуассоновские распределения . . . . .	208
	12.5. Сгруппированные пуассоновские распределения . . . . .	211
	12.6. Распределения Гейне и Эйлера . . . . .	212
Глава	5. <b>Отрицательно биномиальное распределение</b> . . . . .	215
	1. Определение . . . . .	215
	2. Геометрическое распределение . . . . .	217

3.	Исторические замечания . . . . .	219
4.	Моменты . . . . .	223
5.	Свойства . . . . .	224
6.	Приближения и преобразования . . . . .	225
7.	Вычисления и таблицы . . . . .	228
8.	Статистический анализ . . . . .	229
8.1.	Выбор модели . . . . .	229
8.2.	Точечное оценивание: неизвестный параметр $P$ . . . .	230
8.3.	Точечное оценивание: оба параметра неизвестны . . .	231
8.4.	Множества данных с общим параметром . . . . .	234
9.	Характеризации . . . . .	235
9.1.	Геометрическое распределение . . . . .	235
9.2.	Отрицательно биномиальное распределение . . . . .	238
10.	Приложения . . . . .	239
11.	Усеченные отрицательно биномиальные распределения . .	240
12.	О других родственных распределениях . . . . .	243
12.1.	Предельные формы . . . . .	243
12.2.	Расширенная отрицательно биномиальная модель Энгена	244
12.3.	«Обобщенное отрицательно биномиальное распределе- ние» типа преобразования Лагранжа . . . . .	245
12.4.	Взвешенные отрицательно биномиальные распределения	246
12.5.	Свертки, включающие отрицательно биномиальные пе- ременные . . . . .	246
12.6.	Распределение Паскаля—Пуассона . . . . .	248
12.7.	Распределение тасования . . . . .	249
Глава 6.	<b>Гипергеометрические распределения . . . . .</b>	<b>251</b>
1.	Определение . . . . .	251
2.	Исторические замечания . . . . .	252
2.1.	Классическое гипергеометрическое распределение . . .	252
2.2.	Отрицательное (обратное) гипергеометрическое распре- деление: гипергеометрическое время ожидания, бета- биномиальное распределение . . . . .	253
2.3.	Отрицательное бета-биномиальное распределение. Бета-распределение Паскаля, обобщенное распреде- ление Варинга . . . . .	256
2.4.	Распределение Пойа: обобщенные гипергеометрические распределения . . . . .	258
3.	Моменты . . . . .	262
4.	Свойства . . . . .	266
5.	Приближения и границы . . . . .	268
6.	Вычисления и таблицы . . . . .	273
7.	Статистический анализ . . . . .	274
7.1.	Классическое гипергеометрическое распределение . . .	274
7.2.	Отрицательное (обратное) гипергеометрическое распре- деление . . . . .	276

	7.3. Распределение бета-Паскаля . . . . .	277
	8. Характеризация . . . . .	278
	9. Приложения . . . . .	280
	9.1. Классическое гипергеометрическое распределение . . . . .	280
	9.2. Отрицательное (обратное) гипергеометрическое распределение: бета-биномиальное распределение . . . . .	282
	9.3. Отрицательное бета-биномиальное распределение. Бета-распределение Паскаля. Обобщенное распределение Варинга . . . . .	283
	10. Частные случаи . . . . .	283
	10.1. Дискретное равномерное распределение . . . . .	283
	10.2. Распределение лидирования при бросании монеты . . . . .	285
	10.3. Распределение Юла . . . . .	286
	10.4. Распределение Варинга . . . . .	289
	11. Расширенные гипергеометрические распределения . . . . .	290
	12. О других родственных распределениях . . . . .	292
Глава	7. <b>Логарифмическое распределение</b> . . . . .	295
	1. Определение . . . . .	295
	2. Исторические замечания . . . . .	296
	3. Моменты . . . . .	298
	4. Аналитические свойства логарифмического распределения . . . . .	299
	5. Приближения и границы . . . . .	300
	6. Вычисления и таблицы . . . . .	302
	7. Статистический анализ . . . . .	303
	7.1. Выбор модели . . . . .	303
	7.2. Точечное оценивание и доверительные интервалы . . . . .	303
	8. Характеризация . . . . .	306
	9. Приложения . . . . .	307
	10. Усеченные и модифицированные логарифмические распределения . . . . .	309
	11. О других родственных распределениях . . . . .	310
Глава	8. <b>Распределения смесей</b> . . . . .	315
	1. Введение . . . . .	315
	2. Конечные смеси дискретных распределений . . . . .	318
	2.1. Параметры конечных смесей . . . . .	318
	2.2. О смесях с вырожденным в нуле распределением . . . . .	322
	2.3. Конечные пуассоновские смеси . . . . .	328
	2.4. Конечные биномиальные смеси . . . . .	329
	2.5. Другие конечные смеси дискретных распределений . . . . .	332
	3. Непрерывные и счетные смеси дискретных распределений . . . . .	333
	3.1. Три важные теоремы . . . . .	333
	3.2. Смеси пуассоновских распределений . . . . .	336
	3.3. Смеси биномиальных распределений . . . . .	345
	3.4. Другие непрерывные и счетные смеси дискретных распределений . . . . .	348

Глава 9.	<b>Суммы случайного числа случайных слагаемых . . . . .</b>	<b>353</b>
1.	Введение . . . . .	354
2.	Процессы повреждения . . . . .	359
3.	Распределения сумм пуассоновского числа случайных величин . . . . .	361
4.	Распределение Эрмита . . . . .	367
5.	Пуассоновско-биномиальное распределение . . . . .	374
6.	Распределение Неймана типа А . . . . .	378
6.1.	Определение . . . . .	378
6.2.	Свойства моментов . . . . .	380
6.3.	Таблицы и аппроксимации . . . . .	381
6.4.	Оценка параметров . . . . .	383
6.5.	Приложения . . . . .	386
7.	Распределение Пойа—Аэппли . . . . .	387
8.	Распределение Пуассона—Паскаля: пуассоновское отрицательно-биномиальное распределение, обобщенное распределение Пойа—Аэппли . . . . .	391
9.	Обобщенные распределения Неймана типа А . . . . .	395
10.	Распределение Томаса . . . . .	402
11.	Лагранжево-пуассоновские распределения, распределение Бореля—Таннера со сдвигом . . . . .	405
12.	Другие семейства распределений сумм случайного числа случайных слагаемых . . . . .	411
Глава 10.	<b>Распределения совпадений, размещений и серий . . . . .</b>	<b>415</b>
1.	Введение . . . . .	415
2.	Вероятности комбинаций событий . . . . .	416
3.	Распределения совпадений . . . . .	419
4.	Распределения размещений . . . . .	424
4.1.	Классическое размещение и сбор купонов . . . . .	424
4.2.	Статистики Максвелла—Больцмана, Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака . . . . .	429
5.	Распределения серий . . . . .	431
5.1.	Серии из одинаковых элементов . . . . .	431
5.2.	Серии вверх и вниз . . . . .	434
6.	Распределения порядка $k$ . . . . .	435
6.1.	Распределения серий успехов . . . . .	435
6.2.	Основные распределения порядка $k$ . . . . .	436
Глава 11.	<b>Разнообразные дискретные распределения . . . . .</b>	<b>443</b>
1.	Распределения поглощения . . . . .	443
2.	Модифицированные Дандекармом биномиальное и пуассоновское распределения . . . . .	445
3.	Дигамма- и тригамма-распределения . . . . .	446
4.	Дискретные распределения Адеса . . . . .	447
5.	Дискретное $t$ -распределение Стьюдента . . . . .	448
6.	Гита-распределение . . . . .	449

7. Распределение Гегенбауэра: свертка отрицательного биномиального и псевдо-отрицательного биномиального . . . . .	450
8. Распределения Грама—Шарлье типа В . . . . .	452
9. Распределения наблюдений с помехами . . . . .	453
10. Распределения проигранных игр . . . . .	454
11. Распределение Наора . . . . .	456
12. Распределение частичных сумм . . . . .	458
13. Распределения теории массового обслуживания . . . . .	460
14. Распределения регистрируемых значений . . . . .	463
15. Пуассоновское обратно-гауссовское распределение . . . . .	464
16. Распределение частоты гена Скеллама . . . . .	467
17. Двухпараметрические распределения степенного ряда Стейна . . . . .	468
18. Одномерные распределения полиномиального типа . . . . .	470
19. Урновые модели со случайными замещениями . . . . .	472
20. Дзета-распределение и распределение Зипфа . . . . .	475

<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>481</b>
------------------------------------	------------

<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>546</b>
---------------------------------------	------------