

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**А.И. Григорьев
С.О. Ширяева
А.Н. Жаров**

Нелинейные осцилляции заряженной капли

Ярославль 2006

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322я73
Г 83

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2006 года*

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, А.С. Голованов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Григорьев, А.И. Нелинейные осцилляции заряженной капли :
Г 83 моногр. / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров; Яросл. гос.
ун-т. им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 280 с.

ISBN 5-8397-0464-4

В монографии с единой точки зрения в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости как в вакууме, так и при наличии внешней несжимаемой диэлектрической среды ламинарно обтекающего каплю потока и осложняющего влияния внешних силовых полей и вязкости жидкости.

Книга издана при финансовой поддержке грантов Президента РФ № МК-2946-2004-1 и МК-2209-2006-1, а также грантов РФФИ № 03-01-00760 и №06-01-00066-а.

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322я73

© Ярославский государственный
университет, 2006
© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева,
А.Н. Жаров, 2006

ISBN 5-8397-0464-4

1. Введение

Совсем недавно, два с половиной десятилетия назад (первая теоретическая статья [1] появилась 1983 году), начались регулярные исследования нелинейных осцилляций капель [1 – 33]. И хотя самая первая публикация [1] была посвящена исследованию нелинейных осцилляций незаряженной капли, во всех последующих работах [2 – 33] рассматривалась именно заряженная капля. Следует отметить, что экспериментальные и теоретические исследования устойчивости и динамики колебаний заряженных капель жидкости в линейном по амплитуде осцилляций приближении проводятся уже почти полтора столетия. Интерес к заряженной капле объясняется тем, что она является ключевым объектом в самых разнообразных академических, геофизических, технических и технологических явлениях и процессах. Например, с ней приходится встречаться при электростатическом распыливании жидких топлив, инсектицидов, лакокрасочных материалов, в устройствах электрокаплеструйной печати, при исследовании проблем грозового электричества, в капельной модели ядра атома, в жидкометаллических источниках ионов, в ионных коллоидных реактивных двигателях, при жидкометаллической литографии и эпитаксии, при получении порошков тугоплавких металлов и т.п. (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную в них литературу).

Начало теоретического изучения капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли в линейном приближении по амплитуде осцилляций связано с именем Рэлея [47 – 48] и относится к концу девятнадцатого века. Он представил каплю как колебательную систему с бесконечным набором собственных частот колебаний. В качестве отдельных мод осесимметричных колебаний поверхности рассматривались колебания, описываемые соответствующими полиномами Лежандра, при этом номер моды соответствовал числу выпуклостей (или впадин) на поверхности капли. Рэлей рассчитал частоты капиллярных колебаний и нашел критические условия потери устойчивости сильно заряженной капли. Наименее устойчивой оказалась основная (вторая) мода капиллярных колебаний, критические условия потери устойчивости которой и определяют устойчивость всей капли. Величину заряда на капле фиксированного радиуса с заданным коэффициентом по-

верхностного натяжения, при которой теряет устойчивость основная мода, принято называть Рэлеевским пределом устойчивости заряженной капли. При превышении зарядом Рэлеевского предела капля неустойчива и у нее не существует равновесных сферических форм. Со времени появления работы Рэля проделана масса исследований линейной устойчивости капель в различных усложняющих вариантах, количество же публикаций, посвященных линейным исследованиям, измеряется сотнями (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную в них литературу).

В нижеследующем изложении сосредоточимся на исследованиях нелинейных осцилляций заряженных капель [2 – 32, 49 – 51]. Можно выделить три основных направления проведенных исследований: 1) нелинейный анализ эволюции амплитуды капиллярных осцилляций поверхности капли в рамках методов теории возмущений; 2) расчет равновесных форм заряженных капель вблизи Рэлеевского предела и анализ характера бифуркаций решений, имеющих место в окрестности критического значения заряда; 3) исследование нелинейного взаимодействия между отдельными модами колебаний заряженной капли.

Впервые классические методы теории возмущений (метод Линштедта-Пуанкаре) к исследованию осесимметричных капиллярных колебаний конечной амплитуды, совершаемых поверхностью незаряженной капли несжимаемой невязкой жидкости, были применены в [1]. Это позволило получить квадратичные по амплитуде начальной деформации поправки к форме поверхности капли, потенциалам скоростей и в третьем порядке малости к частотам колебаний. Расчеты проводились для трех типов начальных условий, определявшихся заданием начальной деформации капли в виде виртуального возмущения n -й моды осцилляций для $n = 2, 3, 4$. При проведении экспериментальных исследований сдвига частоты при нелинейных колебаниях капли в условиях отсутствия силы тяжести [32] получено хорошее согласие данных измерений с теоретическими предсказаниями работы [1].

В работе [29] на основе более подходящего для исследования многочастотных колебаний метода многих масштабов были исследованы осцилляции конечной амплитуды заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, вызванные начальным возбуждением первых трех мод ($n = 2, 3, 4$), в ситуации когда заряд

капли не достигает Рэлеевского предела. Однако выяснилось, что при увеличении заряда до некоторого порогового зависящего от амплитуды осцилляций значения Q_* , меньшего критической по Рэлею величины, найденные в [29] поправки к амплитудам гармонических колебаний становятся несправедливыми, т.к. неограниченно нарастают при $Q \geq Q_*$. Для устранения таких расхождений в [32] на основе анализа асимптотического поведения решений, полученных в [29], малый параметр масштабирования вводился таким образом, чтобы он характеризовал соотношение между амплитудой деформации и отклонением величины заряда на капле Q от критического Q_* . Это позволило авторам [32] проанализировать нелинейную динамику осесимметричных осцилляций поверхности невязкой заряженной капли вблизи Рэлеевского предела и получить с точностью до второго порядка малости по величине решения, описывающие эволюцию формы капли, поля скоростей и электрического поля при начальном возбуждении основной моды колебаний поверхности.

Нелинейный анализ неосесимметричных колебаний капли, несущей заряд, мало отличающийся от Рэлеевского предела, математическими методами, использованными в [32], предпринят и в [24], где получены динамические уравнения для амплитуд неосесимметричных мод, описываемых сферическими функциями второго порядка. Решения выведенных в [24] уравнений в зависимости от величины начальной деформации капли и близости заряда к критическому значению проявляют тенденцию к стохастичности.

Нелинейная структура и устойчивость осесимметричных статических форм поверхности идеально проводящей заряженной невязкой капли с зарядом, близким к Рэлеевскому пределу, при начальном возбуждении основной ($n=2$) моды рассматривались в [32]. В частности было показано, что Рэлеевский предел соответствует точке транскритической бифуркации семейства статических сферических форм капли на семейства осесимметричных вытянутых и сплюснутых сфероидальных форм (этот результат был подтвержден численными расчетами [51]). Вытянутые формы существуют при значениях заряда, меньших критического, и неустойчивы по отношению к малоамплитудным возмущениям поверхности. Сплюснутые статические формы согласно проведенному анализу существуют при зарядах, больших Рэлеевского

предела (что сразу вызвало сомнение и впоследствии было опровергнуто [24, 49 – 50]), причем сплюснутые статические формы оказались устойчивыми по отношению к малым осесимметричным возмущениям. Кроме того, выяснилось, что при значениях заряда, немного меньших критического, устойчивость исходной сферической формы капли может быть нарушена колебаниями конечной амплитуды. Причем величина заряда, на которую снижается его критическое значение, пропорциональна амплитуде начального удлинения капли. Результаты аналитических вычислений в [32] подтверждаются численными расчетами статических форм поверхности капли при возбуждении первых трех мод. Численный анализ осесимметричных статических форм заряженной капли вблизи Рэлеевского предела был продолжен в [25] с использованием интегральной формы уравнения Лапласа. В квадратичном по амплитудам мод приближении обнаружены не-симметричные относительно экваториальной плоскости формы капель, неустойчивые в линейном приближении. В работе [24] при анализе неосесимметричных колебаний капли получено, что сплюснутые сфероидальные формы капли, существующие согласно [32] и численным расчетам [51] при $Q > Q_*$ неустойчивы по отношению к неосесимметричным возмущениям (позднее аналогичный результат получен и в линейном анализе [49-50]). Таким образом, Рэлеевский предел соответствует точке абсолютной неустойчивости заряженной капли, совершающей осцилляции бесконечно малой амплитуды. Начальная стадия реализации неустойчивости заряженной капли проходит через последовательность удлиняющихся вытянутых сфероидов. При осцилляциях большой амплитуды критическая величина заряда, при которой капля теряет устойчивость, снижается.

В [1, 12] был также подтвержден ранее отмеченный в [26 – 28] факт временной асимметрии осцилляций: при начальном возбуждении основной моды, когда форма капли осциллирует между вытянутым и сплюснутым сфероидами, время нахождения капли (пузыря) в состоянии вытянутого сфероида превышает время ее нахождения в сплюснутом состоянии, и эта тенденция усиливается с увеличением амплитуды осцилляций. Но констатацией этого факта Тсамопулос и Браун и ограничились. Истолкование же ему дано в [52], где показано, что при нелинейных осцилляци-

ях капля совершает колебания не возле сферической формы, как было в линейном случае, но в окрестности фигуры, близкой к вытянутому сфероиду.

Вопросы взаимодействия различных мод капиллярных осцилляций заряженной поверхности капли рассматривались в работах [2, 29]. Найденные в [29] в расчетах второго порядка малости квадратичные по малому параметру компоненты решений (деформации формы капли, потенциала поля скоростей течения жидкости в ней и электростатического потенциала в окрестности капли), а также поправки к частотам осцилляций, определяемые в расчетах третьего порядка малости, содержали в знаменателях множители вида $(\omega_m^2 - j^2 \cdot \omega_n^2)$, где ω_m и ω_n – частоты различных мод осцилляций капли, j – целое число. В некоторых ситуациях (при определенных значениях собственного заряда капли Q , ее радиуса и величины коэффициента поверхностного натяжения) может выполняться соотношение $(\omega_m^2 - j^2 \cdot \omega_n^2) = 0$. Такие ситуации по аналогии с возникающими при анализе вынужденных колебаний принято называть резонансными, поскольку в точках резонансов решения расходятся. В теории возмущений отработаны процедуры отыскания аналитических решений как в окрестностях, так и в самих точках резонансов [53–55] путем введения параметра расстройки, величина которого может непрерывно изменяться. В физических задачах параметры расстройки вводятся на основе изменения физических параметров задачи, которые ранее принимались фиксированными. В итоге резонансные компоненты решения сводятся к секулярным слагаемым, которые в свою очередь обрабатываются в стандартных математических процедурах.

В [29] в расчетах второго порядка малости был обнаружен резонанс между четвертой ($n=4$) и шестой ($n=6$) модами при заряде капли Q_r , докритическом в смысле линейной устойчивости капли по отношению к собственному заряду (в смысле анализа устойчивости, проведенного Рэлеем), $Q_r < Q_*$, здесь Q_* – критический заряд, при котором теряет устойчивость основная мода ($n=2$). Тсамопулос и Браун [29] ввели параметр расстройки на основе варьирования заряда капли Q в малой окрестности Q_r и построили решение, справедливое в самой точке резонанса и в его окрестности. Они показали, что в точке резонанса энергия полностью перекачивается из изначально возбужденной четвертой мо-

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Анализ нелинейных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости во втором порядке малости по амплитуде исходной деформации	13
2.1. <i>Нелинейные осцилляции деформированной в начальный момент времени заряженной капли.....</i>	13
2.2. <i>Внутреннее нелинейное резонансное трехмодовое вырожденное и вторичное комбинационное взаимодействие мод осцилляций заряженной капли.....</i>	22
3. Анализ нелинейных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости в третьем порядке малости по амплитуде исходной деформации.....	42
3.1. <i>Нелинейные осцилляции деформированной в начальный момент времени заряженной капли. Вывод выражений для нелинейных поправок к частотам мод, определяющих начальную деформацию</i>	42
3.2. <i>Внутреннее нелинейное резонансное четырехмодовое взаимодействие мод осцилляций заряженной капли идеальной жидкости</i>	66
4. Нелинейные осцилляции заряженной капли в несжимаемой ма- териальной диэлектрической внешней среде	93
4.1. <i>О расчете амплитуды трансляционной моды при нелиней- ных осцилляциях капли во внешней среде</i>	93
4.2. <i>Нелинейные осцилляции заряженной капли во внешней среде</i>	100
4.3. <i>Резонансное взаимодействие мод нелинейно- осциллирующей во внешней среде заряженной капли</i>	126
4.4. <i>Влияние спектра мод, определяющих начальную деформацию заряженной капли, на критические условия реализации ее неустойчивости по отношению к собственному заряду</i>	140
5. Нелинейные осцилляции заряженной капли в ламинарно обтекающей ее несжимаемой диэлектрической материальной среде	151
5.1. <i>Нелинейные капиллярные колебания и устойчивость заря- женной капли, движущейся относительно среды</i>	151

5.2. О раскачке в нелинейных вторичных комбинационных резонансах осцилляций основной моды движущейся относительно среды заряженной капли	170
6. Нелинейные осцилляции заряженной капли во внешних силовых полях	190
7. Влияние вязкости жидкости на нелинейные осцилляции заряженной капли	211
7.1. Временная эволюция формы поверхности деформированной в начальный момент времени заряженной капли вязкой жидкости в линейном приближении	211
7.2. Нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости	233
8. Литература	264
9. Оглавление	193