

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Звягин

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ. МНОГОЧЛЕНЫ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

Оглавление

1. Кольцо многочленов	4
2. Деление многочленов	10
3. Корни многочленов	21
4. Основная теорема алгебры	25
5. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел.	28
6. Каноническое разложение многочлена над полем вещественных чисел.	34
7. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами	37
8. Рациональные дроби	43
Библиографический список	49

Определение 1.3. Суммой многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ и $g(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i$ называется многочлен

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,s)} c_i x^i, \quad \text{где } c_i = a_i + b_i. \quad (1.2)$$

Здесь недостающие коэффициенты a_i, b_i заменяют нулями.

Из определения вытекают следующие простые факты.

1. Для любого многочлена $f(x) \in P[x]$

$$f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x). \quad (1.3)$$

2. Для ненулевых многочленов $f(x), g(x), f(x) + g(x)$

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g). \quad (1.4)$$

3. Если $f(x), g(x) \in P[x]$, то $f(x) + g(x) \in P[x]$, т.е. сложение многочленов является бинарной алгебраической операцией на множестве $P[x]$.

Определение 1.4. Произведением многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ и $g(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i$ называется многочлен

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n+s} c_k x^k, \quad \text{где } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k = \overline{0, n+s}. \quad (1.5)$$

Здесь суммирование в $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ ведется по всевозможным индексам i и j , для которых $i + j = k$.

Из определения вытекают следующие простые факты.

1. Произведение ненулевых многочленов над полем P не может быть нулевым, при этом

$$\deg fg = \deg f + \deg g. \quad (1.6)$$

2. Если $f(x), g(x) \in P[x]$, то $f(x)g(x) \in P[x]$, т.е. умножение многочленов является бинарной алгебраической операцией на множестве $P[x]$

3. Операция умножения многочленов порождает операцию умножения многочлена на элемент из поля P как частный случай умножения многочленов: если $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ и $\alpha \in P$, то

$$\alpha f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha a_i x^i,$$

таким образом, на множестве $P[x]$ определен и внешний закон композиции.

Приведем примеры действий с многочленами.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2$ и $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ – многочлены над полем \mathbb{Z}_3 . Вычислить: 1) $f(x) + g(x)$; 2) $f(x)g(x)$; 3) $(f(x) + 2g(x))^9$.

Решение:

$$1) f(x) + g(x) = (2 + 1)x^3 + (1 + 2)x^2 + (0 + 2)x + (2 + 1) = 2x;$$

$$2) f(x)g(x) = (2x^3 + x^2 + 2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 2x^6 + 2x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 2;$$

$$3) f(x) + 2g(x) = (2x^3 + x^2 + 2) + 2(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

Так как \mathbb{Z}_3 – поле характеристики 3, то в нем справедливы тождества $(a + b)^3 = a^3 + b^3$, $(a + b)^9 = a^9 + b^9$. Разумеется, это распространяется и на многочлены над полем \mathbb{Z}_3 . Поэтому

$$\begin{aligned} (f(x) + 2g(x))^9 &= (x^3 + 2x^2 + x + 1)^9 = \\ &= (x^3)^9 + 2^9(x^2)^9 + x^9 + 1^9 = x^{27} + 2x^{18} + x^9 + 1. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. Множество $P[x]$ всех многочленов над полем P является коммутативным кольцом с единицей и без делителей нуля (областью целостности).

Доказательство. Проверим все аксиомы кольца.

Прежде всего отметим, что $P[x]$ - аддитивная абелева группа: коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (в силу (1.2)), нулем является нулевой многочлен (как отмечено в (1.3)). Противоположным к многочлену $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, как легко проверить, является многочлен $-f(x) = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i$.

Коммутативность умножения следует из коммутативности умножения элементов в поле. Докажем ассоциативность умножения. Пусть $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $g_s(x) = \sum_{k=0}^s b_k x^k$ и $h_p(x) = \sum_{k=0}^p c_k x^k$. Обозначим через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ коэффициенты при x^k у многочленов $f(x)g(x), g(x)h(x), (f(x)g(x))h(x)$ и $f(x)(g(x)h(x))$ соответственно. Тогда в силу (1.5):

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{i+j=k} \alpha_i c_j = \sum_{i+j=k} \left(\sum_{r+t=i} a_r b_t \right) c_j = \sum_{r+t+j=k} a_r b_t c_j, \\ \delta_k &= \sum_{r+i=k} a_r \beta_i = \sum_{r+i=k} a_r \left(\sum_{t+j=i} b_t c_j \right) = \sum_{r+t+j=k} a_r b_t c_j, \end{aligned}$$

т.е. $\gamma_k = \delta_k$. Отсюда, если учесть, что $\deg(fg)h = \deg f(gh) = n + s + p$, следует равенство $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$.

Роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени.

Справедливость аксиомы дистрибутивности вытекает из равенства $\sum_{i+j=k} (a_i + b_i) c_j = \sum_{i+j=k} a_i c_j + \sum_{i+j=k} b_i c_j$, так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^k в многочлене $(f(x) + g(x))h(x)$, а правая часть - коэффициентом при этой же степени x в многочлене $f(x)h(x) + g(x)h(x)$.

Наконец, из (1.6) следует, что в $P[x]$ нет делителей нуля. □

Замечание 1.1. Кольцо $P[x]$ не является полем, так как не всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$. Действительно, равенство $f(x)f^{-1}(x) = 1$ с учетом (1.6) означает, что многочлены нулевой степени, и только они, обладают обратными.

Отсюда вытекает, что для умножения многочленов обратная операция - деление - не существует. В этом отношении система всех многочленов над полем P напоминает систему всех целых чисел. Эта аналогия проявляется в том, что для многочленов, как и для целых чисел, существует алгоритм деления с остатком.

2. Деление многочленов

Сначала приведем теорему о представлении многочлена.

Теорема 2.1. *Для двух любых многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$, где $g(x) \neq 0$, существует, и притом единственная, пара многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$ такая, что:*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad (2.1)$$

где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r < \deg g$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Будем считать, что $f(x) \neq 0$, так как в противном случае можно положить $q(x) = 0, r(x) = 0$. Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i, \deg f = n, \deg g = s$. Без ограничения общности считаем, что $n \geq s$, так как в противном случае можно взять $q(x) = 0$ и $r(x) = f(x)$. Применим метод математической индукции по степени n многочлена $f(x)$, считая $g(x)$ фиксированным.

1. Пусть $n = 0$. Тогда $s = 0$ и $q(x) = a_0 b_0^{-1}, r(x) = 0$.
2. Пусть теперь теорема верна для любого многочлена степени меньшей n .
3. Докажем теорему для многочлена $f(x)$ степени $n \geq s$.

Воспроизведем первый шаг известного из элементарной алгебры алгоритма деления многочленов с действительными коэффициентами, т.е. построим одночлен $a_n b_s^{-1} x^{n-s}$ и составим разность

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_s^{-1} x^{n-s} g(x). \quad (2.2)$$

Либо многочлен $f_1(x)$ равен 0, либо $\deg f_1 < n$. В первом случае можно предположить $q(x) = a_n b_s^{-1} x^{n-s}, r(x) = 0$. Во втором случае для многочлена $f_1(x)$ по индуктивному предположению найдутся многочлены $q_1(x)$ и $r(x)$ такие, что $f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Тогда, согласно (2.2), $f(x) = a_n b_s^{-1} x^{n-s} g(x) + g(x)q_1(x) + r(x)$. Положив $q(x) = a_n b_s^{-1} x^{n-s} + q_1(x)$, приходим к паре многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$, удовлетворяющих условиям (2.1).