

А.Р. Лакерник

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА КРАТКИЙ КУРС

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по образованию в области телекоммуникаций
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
дипломированных специалистов «Телекоммуникации»*



Москва • Логос • 2008

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я.73
Л19

Серия основана в 2003 году

Рецензенты

Л.М. Баскин, доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий
им. профессора М.А. Бонч-Бруевича

В.Г. Данилов, доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
Московского технического университета связи и информатики

Лакерник А.Р.

Л19 Высшая математика. Краткий курс: учеб. пособие / А.Р. Лакер-
ник. — М.: Логос, 2008. — 528 с. — (Новая университетская библиотека).
ISBN 978-5-98704-523-7

В полном объеме изложен курс математического анализа и высшей математики, изучаемый в вузах по направлениям (специальностям) техники и технологии, включая теорию пределов, непрерывность функции, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, неопределенный и определенный интегралы, дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теорию функций комплексного переменного и операционное исчисление. Изложение построено по модульному принципу, позволяющему варьировать объем и сложность освещения отдельных разделов с учетом задач подготовки специалистов и уровня знаний студентов. Методической основой учебного пособия является многолетний опыт преподавания математики в Московском техническом университете связи и информатики.

Для студентов высших учебных заведений, получающих образование по направлению «Телекоммуникации». Может использоваться при подготовке кадров по широкому кругу направлений и специальностей в области техники и технологии, естественных наук и прикладной математики.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я.73

ISBN 978-5-98704-523-7

© Лакерник А.Р., 2008
© Логос, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Условные обозначения	12
I. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ	13
1. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	13
1.1. Определение действительного числа	13
1.2. Ограниченные множества действительных чисел	16
1.3. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона	18
1.4. Функции	20
2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ	21
2.1. Определение предела последовательности и предела функции	21
2.2. Бесконечно малые последовательности и функции и их свойства	27
2.3. Связь существования предела с бесконечно малыми. Основные теоремы о пределах	30
2.4. Некоторые теоремы о пределах последовательностей и функций	34
2.5. Некоторые замечательные пределы	38
2.6. Сравнение бесконечно малых	43
3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ	43
3.1. Непрерывность функции в точке	43
3.2. Классификация точек разрыва	47
3.3. Непрерывность функции на множестве	49
3.4. Равномерная непрерывность функции	52
II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	55
4. ПРОИЗВОДНАЯ	55
4.1. Определение, физический и геометрический смысл производной	55
4.2. Вычисление производной функции	57
4.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал	64
4.4. Производные и дифференциалы высших порядков	68
4.5. Функции, заданные параметрически, и их производные	71
5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ	74
5.1. Теоремы о среднем	74

5.2. Правило Лопиталя	78
5.3. Формула Тейлора	86
6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	98
6.1. Возрастание и убывание функций	98
6.2. Экстремумы функции	100
6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке	106
6.4. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба	107
6.5. Асимптоты графика функции	111
6.6. Примерная схема общего исследования функции и построения ее графика	114
7. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА	117
7.1. Определение векторной функции скалярного аргумента	117
7.2. Предел векторной функции скалярного аргумента	119
7.3. Непрерывность векторной функции скалярного аргумента	121
7.4. Производная векторной функции скалярного аргумента	121
III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	126
8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ	126
8.1. Комплексные числа	126
8.2. Тригонометрическая форма комплексного числа	129
8.3. Показательная форма комплексного числа	130
8.4. Многочлены	131
8.5. Рациональные функции	136
9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	142
9.1. Понятие неопределенного интеграла	142
9.2. Свойства неопределенного интеграла	143
9.3. Таблица основных интегралов	144
9.4. Замена переменной в неопределенном интеграле	148
9.5. Интегрирование по частям	150
9.6. Интегрирование рациональных дробей	153
9.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций	156
9.8. Интегрирование тригонометрических функций	159
9.9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений при помощи тригонометрических подстановок	162
10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	165
10.1. Понятие определенного интеграла	165

10.2. Свойства определенного интеграла	167
10.3. Существование определенного интеграла	170
10.4. Вычисление определенного интеграла	173
10.5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	175
10.6. Вычисление площадей плоских фигур	177
10.7. Длина дуги плоской кривой	182
10.8. Вычисление объемов тел	185
11. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	188
11.1. Определение несобственного интеграла	188
11.2. Геометрический смысл, свойства и вычисление несобственных интегралов	189
11.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций	192
11.4. Несобственные интегралы от функций произвольного знака	195
11.5. Главное значение несобственного интеграла	200
IV. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА	201
12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	201
12.1. Многомерные пространства	201
12.2. Определение, предел и непрерывность функции нескольких переменных	204
12.3. Частные производные. Дифференциал функции	207
12.4. Производные сложной функции	213
12.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков ...	220
12.6. Формула Тейлора для функции нескольких переменных	226
12.7. Экстремумы функции нескольких переменных	230
12.8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	237
12.9. Производная по направлению. Градиент	240
13. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА	244
13.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	244
13.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	246
13.3. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра	248
13.4. Гамма-функция	252
V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	258
14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА	258
14.1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям	258

14.2. Дифференциальные уравнения произвольного и первого порядков	260
14.3. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решений	262
14.4. Дифференциальные уравнения высших порядков	277
14.5. Уравнения, допускающие понижение порядка	280
15. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	283
15.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения	283
15.2. Линейная зависимость и независимость функций	284
15.3. Структура общего решения линейного однородного уравнения	288
15.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	290
15.5. Неоднородные линейные уравнения высших порядков	298
15.6. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида	300
15.7. Метод вариации произвольных постоянных	307
VI. РЯДЫ	311
16. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	311
16.1. Свойства сходящихся рядов	311
16.2. Ряды с неотрицательными членами	314
16.3. Ряды с членами произвольного знака	320
17. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ	325
17.1. Область сходимости функционального ряда	325
17.2. Равномерная сходимость функционального ряда	326
17.3. Свойства равномерно сходящихся рядов	328
17.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда	332
17.5. Равномерная сходимость степенного ряда	336
17.6. Разложение функций в степенные ряды	340
17.7. Применение разложений в степенные ряды для решения дифференциальных уравнений	347
18. РЯДЫ ФУРЬЕ	354
18.1. Ортогональные и ортонормированные системы функций	354
18.2. Ряд Фурье по произвольной ортонормированной системе функций. Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом 2π	356
18.3. Тригонометрический ряд Фурье для функции с произвольным периодом $2l$. Ряд Фурье в комплексной форме	363

18.4. Средняя квадратичная погрешность. Минимальное свойство коэффициентов Фурье	366
18.5. Интеграл Фурье	368

VII. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ	375
--------------------------	------------

19. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	375
------------------------------------	------------

19.1. Определение и свойства двойного интеграла	375
19.2. Вычисление двойного интеграла	380
19.3. Определение и свойства тройного интеграла	385
19.4. Вычисление тройного интеграла	388
19.5. Замена переменных в двойном интеграле	392
19.6. Двойной интеграл в полярных координатах	396
19.7. Замена переменных в тройном интеграле	399

20. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	404
--	------------

20.1. Криволинейный интеграл первого рода	404
20.2. Криволинейный интеграл второго рода	406
20.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути интегрирования	412

21. ТЕОРИЯ ПОЛЯ	417
------------------------------	------------

21.1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент	417
21.2. Векторное поле. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля вдоль кривой	419
21.3. Поверхностный интеграл первого и второго рода	421
21.4. Формула Гаусса-Остроградского	428
21.5. Формулы Грина и Стокса	432
21.6. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка	440
21.7. Специальные векторные поля	442

VIII. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО

ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	446
--	------------

22. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО

ПЕРЕМЕННОГО	446
--------------------------	------------

22.1. Определение и некоторые элементарные функции комплексного переменного	446
22.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного	450
22.3. Производная функции комплексного переменного	454
22.4. Интеграл от функции комплексного переменного	457
22.5. Интегральная теорема Коши	463
22.6. Интегральная формула Коши	466
22.7. Краткие сведения о рядах с комплексными членами	473

22.8. Ряд Тейлора	475
22.9. Ряд Лорана	478
22.10. Классификация изолированных особых точек	485
22.11. Вычеты и их нахождение	489
22.12. Основная теорема о вычетах.....	492
22.13. Вычисление некоторых интегралов от функций действительного переменного	494
23. ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	501
23.1. Оригинал и его изображение	501
23.2. Свойства преобразования Лапласа	506
23.3. Нахождение оригиналов по изображениям	514
23.4. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом	518
23.5. Применение теоремы запаздывания для нахождения изображений различных функций	521

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс основан на лекциях, читаемых автором студентам Московского технического университета связи и информатики.

Зачем нужен такой курс? Ведь его материал содержится во многих других учебниках. Дело в том, что автор поставил себе цель кратко, но вместе с тем максимально строго изложить такие сложные основополагающие разделы, как предел последовательности и функции, непрерывность функции, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной, функции нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теория поля, элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление. В учебниках для технических вузов этот материал либо дается излишне упрощенно, без части сведений и доказательств, а это противоречит самой сути математики как предмета, либо занимает очень большой объем, что отпугивает основную массу студентов. Если исходить только из лекций, то студентам трудно воспринимать упомянутый материал без наличия соответствующей учебной литературы в силу сложности тем и наличия только небольшого времени для их изложения.

Почти все теоремы в курсе приводятся с доказательствами. В первой главе теоремы о пределах последовательностей и функций изложены параллельно, что, по мнению автора, способствует лучшему пониманию материала. Даются необходимые предварительные сведения: аксиоматика действительных чисел, метод математической индукции, элементы комбинаторики, бином Ньютона. Весь материал соответствует примерно 140 часам лекционного времени.