

УДК 519

РЕДАКТОР-СОСТАВИТЕЛЬ — профессор *Ф.А. Богомолов*

АВТОР ПРЕДИСЛОВИЯ — чл.-корреспондент РАН Ю. И. Манин

КОММЕНТАРИИ: профессор *Ф.А. Богомолов*,

профессор *А.Л. Городенцев*

профессор *S. Bradlow*, Univesity of Illinois at Urbana-Champaign

профессор *O. Garcia-Prada*, Universidad Autonoma de Madrid

профессор *C. Florentino*, Department of Mathematics, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

профессор *J. Mourão*, Department of Mathematics, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

профессор *J. P. Nunes*, Department of Mathematics, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

ПЕРЕВОД СТАТЕЙ НА РУССКИЙ ЯЗЫК — *В. Я. Пидстригач, Н. А. Тюрин*

ПОДГОТОВКА ИЗДАНИЯ К ПЕЧАТИ — *А. Л. Городенцев, С. А. Кулешов*



Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований по  
проекту №07-01-07080.

---

### **Тюрин А. Н.**

Сборник избранных трудов: в 3-х т. Том III. Алгебраическая геометрия в топологии и физике. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. — 668 с.

Третий том Сборника избранных трудов Андрея Николаевича Тюриня содержит работы, посвященные алгебро-геометрическим аспектам теории гладких структур на четырехмерных многообразиях, а также серию работ по геометрическим проблемам теории квантования. Среди основных тем — теория инвариантов Дональдсона, их вычисление для алгебраических поверхностей, связь инвариантов Дональдсона с инвариантами Зайберга–Виттена, синтез алгебраической и лагранжевой геометрии в теории геометрического квантования.

**ISBN 5-93972-588-0**

©Институт компьютерных исследований, для издания на русском языке, 2006

©С. А. Тюрин, 2006

©Ф. А. Богомолов — редактор-составитель, 2006

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>1. Топология, гладкости на четырехмерных многообразиях</b>	<b>7</b>
1. Предисловие к третьему тому . . . . .	9
<b>2. Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона</b>	<b>15</b>
Введение . . . . .	15
§ 1. От гомотопического типа до гладкости . . . . .	17
§ 2. Пучки и расслоения на поверхности . . . . .	29
§ 3. Связности в расслоении и метрики на многообразиях . . . . .	48
§ 4. Полиномы Дональдсона . . . . .	62
§ 5. Соотношения Римана и гладкая инвариантность канонического класса . . . . .	75
§ 6. Заключение . . . . .	84
Литература . . . . .	87
<b>3. Шесть лекций о четырехмерных многообразиях</b>	<b>91</b>
Лекция 1. Введение . . . . .	91
Лекция 2. Отражения в ортогональных группах . . . . .	99
Лекция 3. Монодромия и $d$ -стабильные кривые . . . . .	108
Лекция 4. Полиномы Дональдсона. Большая Программа . . . . .	117
Лекция 5. Пространства инстантов. Фильтрации подскока. Спин-полиномы . . . . .	132
Лекция 6. Процедура Геометрической Аппроксимации для спин-канонических инвариантов . . . . .	147
Литература . . . . .	164
<b>4. Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака</b>	<b>169</b>
Введение . . . . .	169
Глава 1. . . . .	170
§ 1. Параметры $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -структуры и определение $\mathbb{C}$ -инстантов . . . . .	170
§ 2. Локальное описание модулей $(C, \nabla_0)$ -инстантов на $(M, g)$ . . . . .	177

§ 3. Трансверсальность . . . . .	179
§ 4. Приводимые связности . . . . .	184
§ 5. Ориентация . . . . .	188
§ 6. 1-исключительные инстантоны . . . . .	190
Глава 2. . . . .	192
§ 1. Исключительные компоненты пространства модулей и $\delta$ -исключительные расслоения . . . . .	192
§ 2. Геометрия $\delta$ -исключительных расслоений ранга 2 . . . . .	200
§ 3. Виртуальная степень . . . . .	217
Глава 3. . . . .	222
§ 1. Конусы нелинейных фредгольмовых отображений . . . . .	222
§ 2. Раздутие многообразия $\mathcal{N}$ . . . . .	227
§ 3. Схемная структура модулей . . . . .	232
§ 4. Концы пространства $M_{1,0}$ . . . . .	234
Глава 4. . . . .	239
§ 1. Диффеоморфизмы и исключительные расслоения . . . . .	239
§ 2. Виртуальные степени и геометрия ложных поверхностей дель Пеццо . . . . .	248
§ 3. Препятствие к диффеоморфности для ложных поверхностей дель Пеццо степени 2 . . . . .	261
§ 4. Заключительные замечания . . . . .	283
Литература . . . . .	284
<b>5. Спин-полиномиальные инварианты гладких структур на алгебраических поверхностях . . . . .</b>	<b>287</b>
Введение . . . . .	287
§ 1. $\text{Spin}^C$ -структура и индекс оператора Дирака . . . . .	291
§ 2. Фильтрация многообразия модулей инстантонов по уровням подскока . . . . .	295
§ 3. Алгебраические поверхности . . . . .	301
§ 4. Геометрическая аппроксимация . . . . .	304
§ 5. $H$ -простота классов дивизоров . . . . .	313
§ 6. Сравнение различных многообразий модулей . . . . .	317
§ 7. Геометрическая аппроксимация и деформация метрики . . . . .	331
Литература . . . . .	337
<b>6. Канонические спин-полиномы алгебраической поверхности. I . . . . .</b>	<b>340</b>
Введение . . . . .	340
Глава 1. . . . .	351
§ 1. Почти канонические поляризации иррациональной алгебраической поверхности . . . . .	351
§ 2. Система якобианов и $\theta$ -локусов алгебраической поверхности . . . . .	354

§ 3. Отметки расслоений и сигма-процесс . . . . .	361
§ 4. Структура пучков короны и модулярные соответствия . . . . .	368
§ 5. Полиномы . . . . .	375
Глава 2. . . . .	378
§ 1. Проблема нетрансверсальности . . . . .	378
§ 2. Нормальный конус тэта-локуса . . . . .	383
§ 3. Канонические полиномы . . . . .	385
§ 4. Спин-барьеры и канонические спин-полиномы . . . . .	391
§ 5. Сравнения с алгебро-геометрическими полиномами и следствия . . . . .	395
Литература . . . . .	400
<b>7. Локализация инвариантов Дональдсона и классы Зайберга–Виттена . . . . .</b>	<b>403</b>
Введение . . . . .	403
§ 1. Конфигурационное пространство и его когомологии . . . . .	404
§ 2. Уравнение . . . . .	412
§ 3. Трансверсальность . . . . .	416
§ 4. Компактификация . . . . .	422
§ 5. Локализация полиномов Дональдсона . . . . .	425
Литература . . . . .	427
<b>II. Лагранжева геометрия и квантовая теория поля . . . . .</b>	<b>429</b>
<b>8. Комплексификация условий Бора–Зоммерфельда . . . . .</b>	<b>431</b>
§ 1. Глобальные структуры на подпространствах лагранжевых циклов . . . . .	431
§ 2. Комплексная структура . . . . .	438
§ 3. Суперциклы . . . . .	442
§ 4. $u$ -кривые для вещественных поляризации . . . . .	451
§ 5. Неабелева теория тэта-функций . . . . .	455
Литература . . . . .	460
<b>9. Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии. (GQP и зеркальная симметрия) . . . . .</b>	<b>462</b>
§ 1. spLag-циклы . . . . .	462
§ 2. sdAG-циклы (малая деформация алгебраических циклов) . . . . .	480
§ 3. Малая деформация алгебраической геометрии . . . . .	490
§ 4. Применение процедуры геометрического квантования к $CY_2$ случаю . . . . .	499
§ 5. Комплексный 3-мерный случай . . . . .	518
§ 6. Комплексные структуры и глобализации . . . . .	526
§ 7. SpLag и sdAG 3-циклы . . . . .	535

§ 8. GFT для $CY_3$ . . . . .	544
§ 9. Геометрия $3/2$ -псевдоголоморфных суперциклов . . . . .	554
Литература . . . . .	559
<b>10. О базисах Бора–Зоммерфельда . . . . .</b>	<b>562</b>
§ 1. Циклы степени 0 . . . . .	562
§ 2. ВРУ-конструкция, геодезический подъем и геометрическое квантование . . . . .	572
§ 3. Приложение: теория неабелевых тэта-функций с характеристиками . . . . .	580
§ 4. Комбинаторная теория и отождествления . . . . .	589
§ 5. Ковариантно постоянные полуформы и особенности . . . . .	597
Литература . . . . .	600
<b>11. Абелева лагранжева алгебраическая геометрия . . . . .</b>	<b>603</b>
Введение . . . . .	603
§ 1. Предварительные сведения и обозначения . . . . .	609
§ 2. Келерова геометрия лагранжевых циклов . . . . .	618
§ 3. Голоморфное квантование . . . . .	629
§ 4. Пример: лежандровы узлы в $S^3$ . . . . .	637
Литература . . . . .	643
<b>Комментарии . . . . .</b>	<b>645</b>
Комментарии к статьям	
1. Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона	
2. Шесть лекций о четырехмерных многообразиях	
3. Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака	
4. Спин-полиномиальные инварианты гладких структур на алгебраических поверхностях	
5. Канонические спин-полиномы алгебраической поверхности. I	
6. Локализация инвариантов Дональдсона и классы Зайберга–Виттена (С. Брэдли, О. Гарсиа-Прада) . . . . .	647
Комментарии к статьям	
1. О базисах Бора–Зоммерфельда	
2. Комплексификация условий Бора–Зоммерфельда	
3. Абелева лагранжева алгебраическая геометрия (К. Флорентино, Ж. Мурао, Ж. П. Нуньес) . . . . .	655
Комментарий к статье «Абелева лагранжева алгебраическая геометрия» (А. Л. Городенцев) . . . . .	663