

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава 1. Общие теоретические положения	15
1.1. Основные определения	15
1.1.1. Дифференциальные уравнения	15
1.1.2. Системы дифференциальных уравнений	22
1.2. Основные понятия, связанные с исследованием и решением дифференциальных уравнений	26
1.2.1. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений	26
1.2.2. Сведение дифференциального уравнения высшего порядка к системе дифференциальных уравнений . .	27
1.2.3. Поле направлений. Приближенное решение уравнений методом изоклин	28
1.2.4. Свойства решений линейных дифференциальных уравнений и систем	30
1.2.5. Анализ выходных процессов	32
1.2.6. Анализ устойчивости	35
Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка . .	40
2.1. Уравнения с разделяющимися переменными	40
2.1.1. Метод решения	40
2.1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	45
2.2. Однородные уравнения	50
2.2.1. Метод решения	50
2.2.2. Уравнения, приводящиеся к однородным	53
2.3. Линейные уравнения	56

2.3.1. Метод решения	56
2.3.2. Уравнения, приводящиеся к линейным	62
2.4. Уравнение Риккати	67
2.4.1. Случаи интегрируемости уравнения Риккати	67
2.4.2. Метод вспомогательных переменных	75
2.5. Уравнения в полных дифференциалах	77
2.5.1. Метод решения	77
2.5.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах	82
2.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной . .	97
2.6.1. Постановка задачи	97
2.6.2. Уравнения первого порядка n -й степени	99
2.6.3. Неполные уравнения	101
2.6.4. Полные уравнения	105
2.7. Уравнения высшего порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка. Понижение порядка дифференциальных уравнений	113
2.8. Простейшие краевые задачи	123
Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка	131
3.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	131
3.1.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	131
3.1.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами	137
3.2. Решение задачи Коши	154
3.3. Анализ выходных процессов	158
3.4. Анализ устойчивости	164
3.5. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами	167
3.5.1. Уравнение Эйлера	167

3.5.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами	178
Глава 4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами	186
4.1. Методы нахождения и исследования общего решения однородной системы	186
4.1.1. Метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка	187
4.1.2. Метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы	192
4.1.3. Метод неопределенных коэффициентов	203
4.2. Методы нахождения общего решения неоднородных систем	212
4.2.1. Метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка	212
4.2.2. Метод вариации произвольных постоянных	218
4.2.3. Метод подбора частного решения	223
4.3. Решение задачи Коши	234
4.4. Анализ выходных процессов	236
4.5. Анализ устойчивости линейных многомерных стационарных динамических систем	243
Глава 5. Применение операционного исчисления	248
5.1. Преобразование Лапласа	248
5.1.1. Основные определения	248
5.1.2. Свойства преобразования Лапласа	252
5.1.3. Нахождение изображения по оригиналу	259
5.1.4. Нахождение оригинала по изображению	269
5.2. Применение преобразования Лапласа	275
5.2.1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем	275
5.2.2. Применение передаточных функций для анализа выходных процессов	292

Глава 6. Анализ поведения динамических систем на фазовой плоскости	303
6.1. Динамические системы и их исследование в фазовом пространстве. Основные положения	303
6.2. Анализ поведения линейных динамических систем второго порядка на фазовой плоскости	306
6.3. Анализ поведения нелинейных автономных динамических систем второго порядка	318
Глава 7. Приближенно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений и систем	335
7.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов	335
7.1.1. Постановка задачи	335
7.1.2. Метод неопределенных коэффициентов	337
7.1.3. Метод последовательного дифференцирования	347
7.2. Метод последовательных приближений	354
7.3. Спектральный метод	362
7.4. Метод Чаплыгина	372
7.5. Метод Ньютона–Канторовича	376
Предметный указатель	380
Список литературы	382

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения являются одним из основных разделов математики, наиболее широко используемых при решении практических задач. Причина этого состоит в том, что при исследовании физических процессов, решении различных прикладных задач, как правило, не удастся непосредственно найти законы, связывающие величины, которые характеризуют исследуемые явления. Обычно легче устанавливаются зависимости между теми же величинами и их производными или дифференциалами. Соотношения такого рода называются *дифференциальными уравнениями*.

Решение задачи исследования физического явления можно разделить на два этапа:

- 1) составление дифференциального уравнения, которое при определенных предположениях описывает сущность рассматриваемого явления;
- 2) нахождение решения дифференциального уравнения, т.е. функциональной зависимости между величинами, характеризующими исследуемое физическое явление.

Возможности и правила составления дифференциальных уравнений определяются знанием законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике могут использоваться законы Ньютона, в теории электрических цепей — законы Кирхгофа, в теории скоростей химических реакций — законы действия масс и т.д. Однако на практике часто случается, что законы, которые могли бы позволить составить дифференциальное уравнение, неизвестны. Тогда прибегают к различным упрощающим предположениям, касающимся протекания процесса при малых изменениях параметров-переменных. К дифференциальным уравнениям в таком случае приводит предельный переход. Вопрос соответствия математической модели и реального явления решается на основе анализа результатов опытов и сравнения их с поведением решения полученного дифференциального уравнения.

Для нахождения решения уравнения применяются аналитические, приближенно-аналитические и численные методы [16]. Аналитические методы позволяют найти точное решение задачи, но лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений. С помощью приближенно-аналитических и численных методов получают приближенные решения, но для значительно более широкого круга проблем.