

**Министерство образования Российской Федерации  
Воронежский государственный университет**

**конспекты лекций вопросы и задачи**

**Дифференциальные уравнения**

**часть 2**

**Задача Коши**

**пособие для студентов специальности 02.03.01**

**Воронеж  
2015**

## Оглавление

<b>2. ЗАДАЧА КОШИ .....</b>	<b>5</b>
2.1. ТЕОРЕМА КОШИ–ПИКАРА .....	5
2.1.1. Постановка задачи.....	5
2.1.2. Пример отсутствия локальной разрешимости. ....	6
2.1.3. Пример отсутствия глобальной разрешимости. ....	6
2.1.4. Пример отсутствия единственности. ....	7
2.1.5. Замечание (о нормах в пространстве $\mathbb{R}^n$ ). ....	7
2.1.6. Условие Липшица и геометрическая интерпретация его в одномерном пространстве.....	10
2.1.7. Утверждение о дифференцируемости, условии Липшица и непрерывности.....	12
2.1.8. Формулировка теоремы Коши-Пикара в полосе. ....	12
2.1.9. Замечание о непрерывности $f$ по совокупности переменных. ....	13
2.1.10. Лемма об эквивалентном интегральном уравнении. ....	13
2.1.11. Определение последовательных приближений.....	14
2.1.12. Лемма о сближении.....	15
2.1.13. Лемма о сходимости.....	16
2.1.14. О непрерывности функции $\varphi(t)$ . ....	17
2.1.15. Лемма об оценке погрешности $n$ -го приближения .....	17
2.1.16. Лемма о существовании. ....	18
2.1.17. Лемма о единственности .....	18
2.1.18. Теорема Коши-Пикара в полосе с переменным коэффициентом Липшица .....	18
2.1.19. Локальная теорема Коши–Пикара.....	19
2.1.20. Теорема Коши–Пикара для уравнения $n$ –го порядка.....	19
2.1.21. Формулировка теоремы Пеано .....	20
2.1.22. Овеществление комплексных ОДУ и теорема Коши–Пикара для комплексной нормальной системы.....	21
2.1.23. Комплексификация. ....	22
2.2. ОПЕРАТОР СДВИГА .....	22
2.2.1. Определение оператора сдвига.....	22
2.2.2. Простейшие свойства оператора сдвига.....	23

### 2.1.2. Пример отсутствия локальной разрешимости.

**Утверждение. Задача**

$$x' = -\operatorname{sign} x + \frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$x(0) = 0 \quad (2)$$

не имеет решения ни на каком промежутке  $J$ .

**Доказательство.** Предположим противное: пусть  $x = \varphi(t)$  – решение задачи (1)–(2) на некотором промежутке  $J$ . Точка  $t = 0 \in J$  может быть граничной точкой  $J$ , но, по определению, не может быть единственной точкой промежутка. Допустим для определенности, что  $J$  содержит некоторую правую полуокрестность нуля. Поскольку  $\varphi'(0) = -\operatorname{sign} \varphi(0) + \frac{1}{2} = -0 + \frac{1}{2} > 0$ , можно выбрать эту полуокрестность так, чтобы на ней при  $t \neq 0$  было  $\varphi(t) > 0$ . Из (1) получается, что при таких  $t$   $\varphi'(t) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ , т. е. функция убывает. Мы получили противоречие: положительная функция, имевшая в нуле нулевое значение, при  $t > 0$  строго убывает и в то же время положительная.

Причиной выявленной "неприятности" является разрывность правой части уравнения (1) в точке  $x = 0$ .

### 2.1.3. Пример отсутствия глобальной разрешимости.

Рассмотрим следующее уравнение, для которого легко найдём общее решение

$$x' = x^2 + 1 \quad \left( \text{т.к. } x^2 + 1 > 0 \right) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x^2 + 1} = dt \quad \left( \text{по теореме об УРП} \right) \quad \Leftrightarrow$$

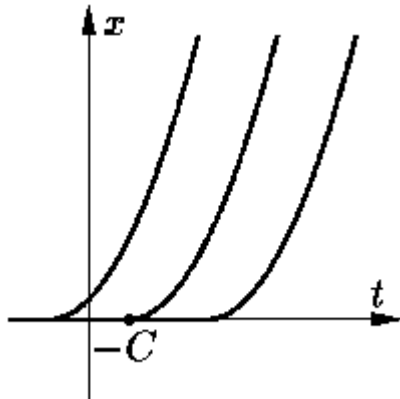
$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = t + C, \quad \left( -\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(t + C), \quad \left( -\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2} \right), \quad (4)$$

Подчеркнем, что из полученного вида решения следует, в частности, что вопрос о разрешимости задачи (3), (2), скажем, на промежутке  $J = \mathbb{R}$  имеет отрицательный ответ, так как область определения любого решения не выходит за рамки интервала  $\left( -\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C \right)$ .

Этот эффект связан с тем, что правая часть  $x^2 + 1$  уравнения (3) при  $x \rightarrow \infty$  растет "слишком быстро" по сравнению с  $x$ .

#### 2.1.4. Пример отсутствия единственности.



Таким примером может служить уравнение

$$x' = 2\sqrt{x},$$

правая часть которого определена при  $x \geq 0$ . У задачи Коши, соответствующей начальному условию (2), помимо нулевого имеется бесконечно много решений

$$x = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -C, \\ (t+C)^2 & \text{при } t \geq -C. \end{cases}$$

Причина неединственности – в том, что правая часть этого уравнения в точке  $x=0$  имеет бесконечную производную по  $x$ .

#### 2.1.5. Замечание (о нормах в пространстве $\mathbb{R}^n$ ).

Для удобства дальнейшего изложения нам необходимо познакомиться с обобщением понятия расстояния в конечномерном пространстве в виде нормы и изучить некоторые её свойства.

**Определение.** Нормой в линейном пространстве  $L$  называют функционал  $\|\cdot\|$ , определённый на всём пространстве и удовлетворяющий для всех  $x, y \in L$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  следующим аксиомам:

1.  $\|x\| \geq 0$  для всех  $x \in L$  и  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ , где  $\theta$  – ноль пространства  $L$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

#### Примеры норм.

а) в  $\mathbb{R}^n$ :

$$1B) \|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

$$2B) \|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

б) в  $C([0, T], \mathbb{R}^n)$  – пространстве непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций со значениями в  $\mathbb{R}^n$ :

$$1C) \|x\| = \max_{t \in [0, T]} \left\{ \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \right\}, \text{ где } \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} - \text{любая норма в } \mathbb{R}^n.$$

в) в пространстве всех квадратных матриц размером  $n \times n$ , состоящих из действительных чисел:

$$1M) \|A\| = \max_{j=1, n} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^n} \right\},$$

$$2M) \|A\| = \max_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} \left\{ |a_{ij}| \right\},$$

$$3M) \|A\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|Ab\|_{\mathbb{R}^n} - \text{норма матрицы, инициированная нормой вектора.}$$

**Задача.** Проверить, что нормы, приведённые в примерах, удовлетворяют аксиомам 1–3.

**Определение.** Последовательность  $\{x_k\} \subset L$  называется сходящейся по норме  $\|\cdot\|$  к  $x \in L$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$ .

**Определение.** Две нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  одного и того же линейного пространства называются эквивалентными, если для них существуют две положительные константы  $M > m > 0$  и такие, что  $m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1$ .

Из определения следует одновременная сходимость по эквивалентным нормам в том смысле, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_2 = 0$ , и свойство ограниченности в эквивалентных нормах сохраняется. Эквивалентность норм обладает кроме того свойством транзитивности.

Следующее простое свойство будет нам полезным в доказательстве утверждения об эквивалентности норм.

**Свойство нормы (обратное неравенство треугольника).**  
 $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$