Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций вопросы и задачи

Дифференциальные уравнения

часть 2

Задача Коши

пособие для студентов специальности 02.03.01

Воронеж
2015

Оглавление

2.1.2. Пример отсутствия локальной разрешимости.

Утверждение. *Задача*

$$x' = -\operatorname{sign} x + \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

не имеет решения ни на каком промежутке J.

Доказательство. Предположим противное: пусть $x = \varphi(t)$ – решение задачи (1)–(2) на некотором промежутке J. Точка $t = 0 \in J$ *может быть граничной точкой* J, но, по определению, не может быть единственной точкой промежутка. Допустим для определенности, что J содержит некоторую правую полуокрестность нуля. Поскольку $\varphi'(0) = -\operatorname{sign}\varphi(0) + \frac{1}{2} = -0 + \frac{1}{2} > 0$, можно выбрать эту полуокрестность так, чтобы на ней при $t \neq 0$ было $\varphi(t) > 0$. Из (1) получается, что при таких t $\varphi'(t) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, т. е. функция убывает. Мы получили противоречие: положительная функция, имевшая в нуле нулевое значение, при $t > 0$ строго убывает и в то же время положительная.

Причиной выявленной "неприятности" является разрывность правой части уравнения (1) в точке $x = 0$.

2.1.3. Пример отсутствия глобальной разрешимости.

Рассмотрим следующее уравнение, для которого легко найдём общее решение

$$x' = x^2 + 1 \overset{(\text{т.к. } x^2+1>0)}{\Leftrightarrow} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x^2+1} = dt \overset{(\text{по теореме об УРП})}{\Leftrightarrow},$$

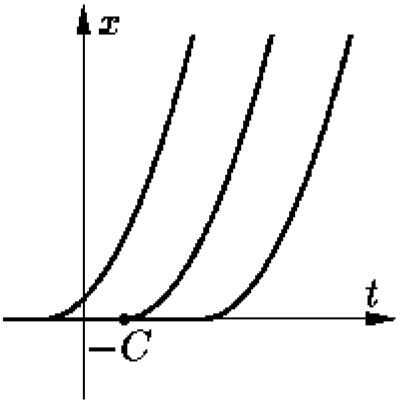
$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = t + C, \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(t + C), \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

Подчеркнем, что из полученного вида решения следует, в частности, что вопрос о разрешимости задачи (3), (2), скажем, на промежутке $J = \mathbb{R}$ имеет отрицательный ответ, так как область определения любого решения не выходит за рамки интервала $\left(-\frac{\pi}{2} - C,\ \frac{\pi}{2} - C\right)$.

Этот эффект связан с тем, что правая часть $x^2 + 1$ уравнения (3) при $x \to \infty$ растет "слишком быстро" по сравнению с x.

2.1.4. Пример отсутствия единственности.



Таким примером может служить уравнение

$$x' = 2\sqrt{x},$$

правая часть которого определена при $x \geq 0$. У задачи Коши, соответствующей начальному условию (2), помимо нулевого имеется бесконечно много решений

$$x = \begin{cases} 0 \text{ при } t < -C, \\ (t+C)^2 \text{ при } t \geq -C. \end{cases}$$

Причина неединственности – в том, что правая часть этого уравнения в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную по x.

2.1.5. Замечание (о нормах в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Для удобства дальнейшего изложения нам необходимо познакомиться с обобщением понятия расстояния в конечномерном пространстве в виде нормы и изучить некоторые её свойства.

Определение. Нормой в линейном пространстве L называют функционал $\|\cdot\|$, определённый на всём пространстве и удовлетворяющий для всех $x, y \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим аксиомам:

1. $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in L$ и $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = \theta$, где θ – ноль пространства L;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Примеры норм.

а) в $\mathbb{R}^n$:

1В) $\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$;

2В) $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

б) в $\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ – пространстве непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$:

1C) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,\,T]}\left\{\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\right\}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ – любая норма в $\mathbb{R}^n$.

в) в пространстве всех квадратных матриц размером $n\times n$, состоящих из действительных чисел:

$$1\text{M})\ \|A\| = \max_{j=\overline{1,n}}\left\{\left\|\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^n}\right\},$$

$$2\text{M})\ \|A\| = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\},$$

3M) $\|A\| = \sup\limits_{\|b\|\le 1}\|Ab\|_{\mathbb{R}^n}$ – норма матрицы, инициированная нормой вектора.

Задача. Проверить, что нормы, приведённые в примерах, удовлетворяют аксиомам 1–3.

Определение. Последовательность $\{x_k\}\subset L$ называется сходящейся по норме $\|\cdot\|$ к $x\in L$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ одного и того же линейного пространства называются эквивалентными, если для них существуют две положительные константы $M > m > 0$ и такие, что $m\cdot\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\cdot\|x\|_1$.

Из определения следует одновременная сходимость по эквивалентным нормам в том смысле, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\|_1 = 0 \leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\|_2 = 0$, и свойство ограниченности в эквивалентных нормах сохраняется. Эквивалентность норм обладает кроме того свойством транзитивности.

Следующее простое свойство будет нам полезным в доказательстве утверждения об эквивалентности норм.

Свойство нормы (обратное неравенство треугольника). $\left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x - y\|$.