

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Математическая обработка результатов измерений  
в лабораторном практикуме по курсу общей  
физики**

Учебно-методическое пособие

Составители:

О.М. Голицына,  
А.В. Меремьянин,  
В.Е. Рисин

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2015

Цель данного учебно-методического пособия – помочь студентам освоить приёмы обработки результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики. Изложен минимум теоретического материала по методам расчёта погрешностей измерений и представления результатов измерений. Даны примеры расчёта погрешностей при прямых и при косвенных измерениях, рекомендации по построению графиков и округлению результатов измерений. Изложены основы метода наименьших квадратов, позволяющего наиболее эффективно определять параметры функциональных зависимостей по результатам измерений. Приведена таблица коэффициентов Стьюдента, которые необходимы при расчёте случайных погрешностей измерений.

## 1. Погрешности измерений

Цель эксперимента – установить истинное значение интересующего нас физического параметра (температуры, ускорения, электрического сопротивления и т. д.). Однако при всяком измерении мы получаем не истинное, а приближенное значение измеряемой величины. Это происходит потому, что наши приборы и методики измерений неидеальны, а исследуемые явления существуют не изолированно; они связаны с множеством других явлений и, поэтому, в процессе измерения на объект исследований и измерительный прибор действует множество факторов, искажающих результат.

Отклонения результатов измерений от истинных значений носят название *погрешностей измерений*. Абсолютной погрешностью измерений  $\Delta x$  называют модуль разности между истинным значением  $X$  физической величины и результатом его измерения  $x$ :  $\Delta x = |X - x|$ . Часто пользуются также относительной погрешностью:

$$E = \frac{\Delta x}{X} \cdot 100\%.$$

Как правило, истинное значение физической величины  $X$  неиз-

тоэлектронов, число радиоактивных распадов в единицу времени). К случайным относят и погрешности, для которых не установлены причины (факторы), влияющие на разброс результатов при повторных измерениях. Поэтому деление погрешностей на систематические и случайные иногда зависит от степени изученности объекта.

Когда говорят о причинах возникновения систематических или случайных погрешностей, часто используют понятия существенных (но не случайных) и несущественных факторов возникновения погрешностей. Каждый существенный фактор способен заметно изменить результат измерений. Действие таких факторов приводит к возникновению систематических погрешностей. Эти факторы могут быть выявлены и устранены или их влияние учтено (хотя иногда сделать это довольно сложно и дорого).

Несущественные факторы в одиночку не способны заметно изменить результат измерений. Однако случайная комбинация большого количества несущественных факторов приводит к появлению случайных погрешностей  $\Delta x_{\text{сл}}$ . Понятно, что такие погрешности невозможно устранить. Тем не менее, проведение серий измерений и правильная обработка результатов измерений позволяют уменьшить влияние случайных погрешностей на результат измерений и оценить величину таких погрешностей.

## 2. Расчёт случайных погрешностей

Предположим, что все систематические погрешности выявлены и устранены. Если измерительные приборы достаточно чувствительны, то проводя серию измерений можно обнаружить случайный разброс результатов измерений. Таким образом, в общем случае результат измерений  $x$  является случайной величиной.

Случайные величины, взятые в совокупности, подчиняются определённым законам, которые рассматривает теория вероятностей. Обработка результатов измерений основывается на вероятностном подходе (теории вероятностей) и ряде постулатов

математической статистики, которые хорошо оправдывают себя на практике.

Чтобы охарактеризовать случайную величину надо указать, какие значения она может принимать.

Кроме того необходимо указать, как часто, т. е. с какой вероятностью случайная величина может принимать те или иные значения – т. е. задать *распределение* случайной величины.

Комбинация большой совокупности несущественных факторов, сравнимых по величине воздействий на объект исследований и измерительный прибор, приводит к тому, что в экспериментальной физике реализуется так называемое распределение Гаусса. В этом случае результаты измерений  $x$  симметрично рассеяны относительно  $X$  как в сторону больших, так и меньших значений  $X$ . Причём с ростом величины отклонения  $|X - x|$  вероятность отклонения быстро уменьшается.

Среднее арифметическое серии  $n$  измерений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

подвержено гораздо меньшему случайному разбросу, чем отдельные измерения. (То есть, если проводить серии измерений в одинаковых условиях и каждый раз вычислять  $\bar{x}$ , то разброс средних значений будет гораздо меньше разброса отдельных измерений.) В теории вероятностей показано, что  $\bar{x}$  является наилучшей оценкой истинного значения параметра  $X$ . Поэтому рекомендуется проводить серии  $n$  измерений и вычислять  $\bar{x}$ .

Случайный разброс среднего значения  $\bar{x}$  относительно истинного значения  $X$  физического параметра принято характеризовать величиной [1]

$$s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}.$$

Однако случайная погрешность измерений определяется не

Таблица 1

*Значения коэффициентов Стьюдента  $t_{p,n}$*

n	p = 0,90	p=0,95	n	p=0,90	p=0,95
4	2,35	3,18	10	1,83	2,26
5	2,13	2,78	11	1,81	2,23
6	2,01	2,57	12	1,80	2,20
7	1,94	2,45	13	1,78	2,18
8	1,89	2,36	14	1,77	2,16
9	1,86	2,31	15	1,76	2,14

только величиной  $s$ , но и зависит также от вероятности  $p$ , с которой истинное значение  $X$  должно попадать в интервал

$$\bar{x} - \Delta x_{\text{сл}} \leq X \leq \bar{x} + \Delta x_{\text{сл}}. \quad (1)$$

Эту вероятность необходимо *задавать заранее*. Затем по таблицам математической статистики определяют так называемые *коэффициенты Стьюдента  $t_{p,n}$* , зависящие от выбранного уровня вероятности  $p$  и числа измерений  $n$ .

Случайная погрешность измерений определяется произведением:

$$\Delta x_{\text{сл}} = s \cdot t_{p,n}.$$

Результат обработки измерений следует записывать в виде:

$$X = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{сл}} \quad \text{с вероятностью} \quad p = \dots \quad (2)$$

Здесь  $p$  называют доверительной вероятностью или надёжностью оценки (2).

В таблице 1 приведены значения коэффициентов Стьюдента для различных значений  $n$  и наиболее часто используемых значений  $p$ .

Допустим,  $\bar{x} = 19,65$ ;  $s = 0,41$ ;  $n = 6$ . Задаём вероятность  $p = 0,95$  и по таблице находим коэффициент Стьюдента  $t_{p=0,95;n=6} = 2,57$ .