

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Инженерно-технологическая академия

**А. Г. КЛОВО**  
**И. А. ЛЯПУНОВА**

## **КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ**

*Учебное пособие*

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2020

УДК 512.1, 514.12.01, 517.2, 517.31

ББК 22.141, 22.151.5, 22.161.1

К50

*Печатается по решению кафедры высшей математики  
Института компьютерных технологий и информационной безопасности  
Южного федерального университета  
(протокол № 5 от 12 ноября 2019 г.)*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой высшей математики  
Южного федерального университета  
*Г. В. Куповых*

доктор физико-математических наук, профессор  
Таганрогского института имени А. П. Чехова (филиал) «РГЭУ (РИНХ)»  
*А. А. Илюхин*

**Клово, А. Г.**

К50 Курс лекций по математике : учебное пособие / А. Г. Клово,  
И. А. Ляпунова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ;  
Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020.  
– 199 с.

ISBN 978-5-9275-3503-3

Учебное пособие «Курс лекций по математике» задумано как помощник студентам в изучении курса математики. Данная книга является первой частью трёхсеместрового курса математики в техническом вузе и соответствует тому, что изучается в первом семестре.

УДК 512.1, 514.12.01, 517.2, 517.31

ББК 22.141, 22.151.5, 22.161.1

ISBN 978-5-9275-3503-3

© Южный федеральный университет, 2020  
© Клово А. Г., Ляпунова И. А., 2020  
© Оформление. Макет. Издательство  
Южного федерального университета, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	9
ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА .....	10
ЛЕКЦИЯ 1. Развитие понятия числа, комплексные числа, геометрический смысл операций над ними .....	11
1.1. Развитие понятия числа, числовые множества .....	11
1.2. Комплексные числа, действия над ними .....	12
1.3. Комплексные числа как векторы на плоскости .....	15
1.4. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел .....	16
1.5. Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел .....	17
1.6. Показательная форма записи комплексных чисел .....	17
ЛЕКЦИЯ 2. Извлечение корня $n$ -й степени из комплексных чисел, решение алгебраических уравнений .....	18
1.7. Возведение комплексных чисел в натуральную степень .....	18
1.8. Извлечение корня $n$ -й степени из комплексных чисел .....	21
1.9. Решение алгебраических уравнений .....	22
ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ .....	25
ЛЕКЦИЯ 3. Матрицы, действия над ними .....	25
2.1. Матрицы, действия над матрицами .....	26
ЛЕКЦИЯ 4. Определитель матрицы, свойства и вычисление .....	30
2.2. Определитель матрицы, вычисление определителей, свойства определителей .....	31
ЛЕКЦИЯ 5. Обратная матрица. СЛАУ, матричный вид СЛАУ .....	37
2.3. Обратная матрица .....	37
2.4. СЛАУ, матричный вид СЛАУ .....	40
ЛЕКЦИЯ 6. Некоторые методы решения СЛАУ .....	41
2.5. Матричный метод решения СЛАУ .....	42
2.6. Метод Крамера решения СЛАУ .....	42
2.7. Метод Гаусса решения СЛАУ .....	45
ЛЕКЦИЯ 7. Ранг матрицы и СЛАУ .....	49

Содержание

2.8. Ранг матрицы и его свойства .....	49
2.9. Теорема Кронекера-Капелли .....	53
ГЛАВА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА .....	56
ЛЕКЦИЯ 8. Векторная алгебра, базис и координаты .....	56
3.1. Геометрический вектор, линейные операции над векторами .....	56
3.2. Линейная зависимость и независимость векторов .....	57
3.3. Декартова система уравнений координат на плоскости и в пространстве .....	60
3.4. Преобразование координат при линейных операциях над векторами .....	61
ЛЕКЦИЯ 9. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов .....	64
3.5. Скалярное произведение векторов .....	64
3.6. Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат .....	66
3.7. Векторное произведение векторов .....	66
3.8. Вычисление векторного произведения в ДСК .....	67
3.9. Смешанное произведение векторов .....	68
3.10. Вычисление смешанного произведения в декартовой системе координат .....	69
ЛЕКЦИЯ 10. Линейные преобразования, собственные векторы и собственные значения .....	72
3.11. Линейное преобразование векторов на плоскости .....	72
3.12. Линейное преобразование векторов в пространстве .....	74
3.13. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования .....	75
ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ .....	80
ЛЕКЦИЯ 11. Прямая и плоскость .....	80
4.1. Уравнение прямой на плоскости .....	80
4.2. Уравнение плоскости в пространстве .....	85
4.3. Уравнение прямой в пространстве .....	90
ЛЕКЦИЯ 12. Кривые и поверхности 2-го порядка .....	92
4.4. Кривые 2-го порядка на плоскости .....	92

Содержание

4.5. Эллипс .....	94
4.6. Гипербола .....	96
4.7. Парабола .....	97
4.8. Поверхности 2-го порядка .....	98
ГЛАВА 5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ .....	100
ЛЕКЦИЯ 13. Свойства числовых множеств .....	100
5.1. Числовые множества .....	100
5.2. Грани числовых множеств .....	101
ЛЕКЦИЯ 14. Предел числовой последовательности .....	104
5.3. Числовая последовательность .....	104
5.4. Единственность предела и ограниченность сходящейся числовой последовательности .....	106
5.5. Бесконечно малые величины и их свойства .....	107
5.6. Свойства пределов .....	109
ЛЕКЦИЯ 15. Монотонные последовательности, число $e$ .....	112
5.7. Свойства монотонных последовательностей .....	112
5.8. Бином Ньютона .....	113
5.9. Число $e$ .....	114
5.10. Принцип вложенных отрезков .....	115
5.11. Теорема Больцано-Вейерштрасса .....	116
5.12. Критерий Коши .....	118
ЛЕКЦИЯ 16. Предел функции и его свойства .....	120
5.13. Понятие функции .....	120
5.14. Предел функции по Коши и по Гейне, их эквивалентность .....	121
5.15. Функции, бесконечно малые и бесконечно большие величины .....	122
5.16. Свойства пределов функций .....	123
5.17. Замечательные пределы .....	124
5.18. Сравнение бесконечно малых величин .....	125
ЛЕКЦИЯ 17. Непрерывность функции .....	128
5.19. Непрерывность функции в точке .....	128
5.20. Классификация точек разрыва .....	129
5.21. Непрерывность элементарных функций в области определения .....	130

5.22. Свойства функций, непрерывных на отрезке .....	131
<b>ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b>	
<b>ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....</b>	<b>133</b>
<b>ЛЕКЦИЯ 18. Дифференциал функции, производная .....</b>	<b>133</b>
6.1. Приращение функции и её аргумента, аппроксимация функций .....	133
6.2. Определение дифференциала и производной функции .....	134
6.3. Геометрический и механический смысл производной функции .....	136
<b>ЛЕКЦИЯ 19. Вычисление производных и дифференциалов функции .....</b>	<b>137</b>
6.4. Вычисление производной функции .....	137
6.5. Правила вычисления производной функции .....	138
6.6. Таблица производных основных элементарных функций ...	139
<b>ЛЕКЦИЯ 20. Производные высших порядков, параметрически и неявно заданных функций .....</b>	<b>143</b>
6.7. Производные и дифференциалы высших порядков .....	143
6.8. Производные и дифференциалы функций, заданных параметрически .....	145
6.9. Производные функций, заданных неявно .....	146
<b>ЛЕКЦИЯ 21. Основные теоремы дифференциального исчисления .....</b>	<b>147</b>
6.10. Возрастание, убывание, точки экстремума функции .....	147
6.11. Необходимое условие экстремума функции, теорема Ферма	149
6.12. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши .....	149
<b>ЛЕКЦИЯ 22. Правило Лопиталя .....</b>	<b>150</b>
6.13. Правило Лопиталя .....	151
<b>ЛЕКЦИЯ 23. Формула Тейлора .....</b>	<b>154</b>
6.14. Многочлен Тейлора .....	154
6.15. Оценка остаточного члена в формуле Тейлора .....	156
<b>ЛЕКЦИЯ 24. Исследование функции и построение её графика ....</b>	<b>158</b>
6.16. Условия монотонности функции .....	158
6.17. Достаточные условия экстремума функции .....	160
6.18. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	162

6.19. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба .....	163
6.20. Асимптота графика функции, вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты .....	164
6.21. Возможный план исследования функции и построения её графика .....	164
<b>ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b>	
<b>ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ</b> .....	166
ЛЕКЦИЯ 25. Первообразная, неопределенный интеграл .....	166
7.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла .....	166
7.2. От каких функций можно вычислить неопределенный интеграл .....	168
7.3. Таблица простейших неопределенных интегралов .....	169
7.4. Правила вычисления неопределенного интеграла .....	169
ЛЕКЦИЯ 26. Методы вычисления неопределенного интеграла ...	171
7.5. Простейшие методы интегрирования .....	171
7.6. Метод интегрирования по частям .....	171
7.7. Метод подведения под знак дифференциала .....	173
7.8. Метод замены переменных в неопределенном интеграле ...	173
ЛЕКЦИЯ 27. Интегрирование рациональных функций .....	174
7.9. План вычисления интеграла от рациональной функции .....	174
7.10. Преобразование неправильной дроби в правильную .....	176
7.11. Разложение знаменателя дроби на множители .....	176
7.12. Представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей .....	176
7.13. Интегрирование простейших дробей .....	177
ЛЕКЦИЯ 28. Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений .....	179
7.14. Универсальная тригонометрическая подстановка .....	179
7.15. Частные случаи интегрирования тригонометрических выражений .....	180
7.16. Интегрирование некоторых иррациональных выражений	181
ЛЕКЦИЯ 29. Определенный интеграл, свойства и вычисление ....	185
7.17. Понятие определенного интеграла .....	185

*Содержание*

---

7.18. Свойства определенного интеграла .....	187
7.19. Интеграл с переменным верхним пределом .....	188
7.20. Формула Ньютона-Лейбница .....	188
ЛЕКЦИЯ 30. Несобственные интегралы .....	190
7.21. Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования .....	191
7.22. Несобственные интегралы от неограниченных функций ...	194
7.23. Другие типы несобственных интегралов .....	196
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	197
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	198