

УДК 531  
ББК 22.236.32  
Д405

**Джеллетт Джон Х.**

Трактат по теории трения. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — 264 с.

Книга представляет собой развёрнутое, и вместе с тем очень интересное, изложение основных принципов и методов теоретической механики, сформировавшихся в эпоху Желлетт и давших мощнейших толчок ее дальнейшему развитию. Это издание давно стало библиографической редкостью. В монографии Желлетт рассмотрены все виды сил, четко сформулированы законы, которым подчиняется сила трения. Впервые внимание читателей обращается на различие между трением покоя и трением движения. Обсуждается проблема равновесия, приводятся примеры решения задач на равновесие системы материальных точек и системы твердых тел. Рассматриваются экстремальные положения равновесия, при которых малейшее изменение силы трения, приложенной к одной или более точкам системы, нарушает ее равновесие. Описывается движение материальной точки и системы материальных точек; исследуется движение твердого тела, и особое внимание уделяется случаю, в котором движение представляет собой чистое вращение вокруг неподвижной или изменчивой оси. Также автор проводит различие между обязательным и возможным равновесием, характерное для рассматриваемого вопроса; анализирует принципы, с помощью которых можно избежать неопределенности, так часто встречающейся в задачах, одной из действующих сил в которых является сила трения. Демонстрирует несколько разных задач, три из которых анализирует довольно подробно, это: задача о волчке, задача о фрикционных колесах и задача о локомотивах. Дополнительно прилагается подборка упражнений.

Книга, несомненно, будет полезна для широкого круга математиков, механиков, физиков, историков науки.

**ISBN 978-5-93972-767-9**

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

|   |    |
|---|----|
| <b>Предисловие редакции</b> . . . . .   | 11 |
| <b>Предисловие</b> . . . . .  | 15 |
| <b>ГЛАВА 1. Определения и принципы</b> . . . . .  | 19 |
| 1. Движущие и противодействующие силы . . . . .   | 19 |
| 2. Силы второго класса, зависящие от сил, им противодействующих . . . . .   | 20 |
| 3. Геометрические силы, их определение . . . . .  | 20 |
| 4. Геометрические силы, зависящие от абстракций прикладной механики. Действительная природа этих сил . . . . .                                  | 21 |
| 5. Неопределенность геометрических сил . . . . .  | 23 |
| 6. Трение, его природа и разновидности . . . . .  | 24 |
| 7. Законы трения . . . . .  | 24 |
| 8. Конус сопротивления, угол трения . . . . .   | 25 |
| 9. Коэффициент трения; статическое и динамическое трение . . . . .  | 25 |
| 10. Важное различие между статическим и динамическим трением . . . . .  | 26 |
| <b>ГЛАВА 2. Равновесие с трением</b> . . . . .  | 27 |
| <b>I. Общие принципы равновесия</b> . . . . .   | 27 |
| 1. Положения равновесия, которые не являются абсолютно определенными . . . . .  | 27 |
| 2. Пример. — Тяжелая материальная точка на шероховатой поверхности . . . . .  | 28 |
| 3. Принципы, регулирующие <i>направление</i> сил трения . . . . .   | 28 |
| 4. Пример. — Две материальные точки, соединенные жестким стержнем . . . . .   | 30 |
| 5. Принципы, выведенные из примера . . . . .  | 31 |
| 6. Пример. — Оптимальный угол тяги . . . . .  | 32 |
| <b>II. Равновесие системы материальных точек</b> . . . . .  | 33 |
| 7. Система материальных точек, расположенных на шероховатой поверхности; уравнения равновесия; число неопределенных величин в решении . . . . . | 33 |

|   |           |
|---|-----------|
| 8. Экстремальные положения равновесия . . . . .   | 35        |
| 9. Источник <i>неопределенности</i> в механической задаче . . . . .   | 35        |
| 10. Система материальных точек; другие условия равновесия . . . . .   | 37        |
| 11. Случай с двумя материальными точками . . . . .  | 39        |
| 12. Геометрическое толкование условий . . . . .   | 40        |
| 13. Пример. — Две тяжелые материальные точки, покоящиеся на шероховатых наклонных плоскостях и соединенные нитью . . . . .      | 42        |
| <b>III. Равновесие системы материальных точек, каждая из которых всегда остается на шероховатой кривой . . . . .</b>            | <b>43</b> |
| 14. Система материальных точек, расположенных на шероховатой кривой . . . . .   | 43        |
| <b>IV. Равновесие твердого тела, покоящегося с опорой на одну или более шероховатых поверхностей . . . . .</b>                  | <b>44</b> |
| 15. Твердое тело, расположенное на двух опорных шероховатых поверхностях, на которое действует только сила тяжести . . . . .    | 44        |
| 16. Аналогичный случай, но с произвольными действующими на тело силами . . . . .  | 45        |
| 17. Пример. — Круговой цилиндр, покоящийся на шероховатой наклонной плоскости; со свободным тросом и поддержкой груза . . . . . | 49        |
| 18. Аналогичный случай, но с перекинутым через шкив тросом . . . . .  | 50        |
| 19. Тела, площадь соприкосновения которых конечна . . . . .   | 51        |
| 20. Заключение, полученные из рассмотрения начального движения . . . . .  | 52        |
| 21. Пример. — Тяжелое тело, покоящееся на шероховатой наклонной плоскости . . . . .   | 53        |
| 22. Общий случай с единственной результирующей сил, действующих на твердое тело . . . . .                                       | 53        |
| 23. Случай покоящегося цилиндра, расположенного в другом цилиндре того же радиуса . . . . .                                     | 54        |
| 24. Цилиндр, покоящийся на двух наклонных плоскостях . . . . .  | 55        |
| <b>V. Равновесие нескольких твердых тел . . . . .</b>   | <b>56</b> |
| 25. Система трех тяжелых тел, два из которых покоятся на горизонтальной плоскости . . . . .                                     | 56        |
| 26. Пирамида, составленная из равных сфер . . . . .   | 58        |
| 27. Твердые тела, связанные геометрическими уравнениями; определение геометрических сил . . . . .                               | 61        |
| 28. То же самое; определение сил реакции . . . . .  | 63        |
| 29. Пример. — Два цилиндра, соединенных нитью и покоящихся на наклонной плоскости . . . . .                                     | 64        |
| 30. Пример. — Тележка, покоящаяся на наклонной плоскости за счет блокировки двух ее колес . . . . .                             | 66        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>VI. Равновесие упругой нити</b> . . . . .   | 67  |
| 31. Общая теория. Примеры . . . . .  | 67  |
| <b>ГЛАВА 3. Предельные положения равновесия</b> . . . . .  | 73  |
| 1. Определение предельных положений . . . . .  | 73  |
| 2. Характеристики предельных положений равновесия . . . . .  | 74  |
| 3. Примеры. — Шарнирно сочлененные брусъ; брус, покоящийся<br>на шероховатом цилиндре . . . . .  | 79  |
| 4*. Система материальных точек, покоящихся на шероховатых по-<br>верхностях; условия предельного положения; аналитические<br>леммы . . . . . | 81  |
| 5*. Рассмотрение частного случая . . . . .   | 83  |
| 6*. Геометрический смысл производных . . . . .   | 84  |
| 7*. Случай трех материальных точек . . . . .   | 91  |
| 8*. Предельные положения твердого тела . . . . .   | 95  |
| 9*. Пример. — Твердое тело, покоящееся на трех поверхностях . . . . .  | 96  |
| 10*. Обязательные, но недостаточные условия . . . . .  | 102 |
| <b>ГЛАВА 4. Движение материальной точки или системы материаль-<br/>ных точек</b> . . . . .   | 104 |
| <b>I. Движение одной материальной точки по неподвижной ше-<br/>роховатой поверхности</b> . . . . .   | 104 |
| 1. Фундаментальные уравнения . . . . .   | 104 |
| 2. Уравнения, получаемые за счет изменения независимой пере-<br>менной . . . . .   | 105 |
| 3. Пример. — Тяжелая материальная точка на наклонной плоскости . . . . .   | 107 |
| <b>II. Движение системы материальных точек под воздействием<br/>трения</b> . . . . .   | 110 |
| 4. Фундаментальные уравнения. Неполнота решения . . . . .  | 110 |
| 5. Решение, неполное в отношении лишь покоящихся материаль-<br>ных точек . . . . .   | 113 |
| 6. Математические заключения, полученные из предыдущего об-<br>суждения . . . . .  | 113 |
| 7. Физические заключения . . . . .   | 113 |
| 8. Критерий определения движущейся и покоящейся материаль-<br>ных точек в любой заданный момент времени . . . . .                            | 114 |
| <b>III. Начальное движение системы материальных точек</b> . . . . .  | 115 |
| 9. Возможная неопределенность данного движения . . . . .   | 115 |
| 10. Случай с гладкими опорными поверхностями . . . . .   | 116 |

|  |     |
|--|-----|
| 11. Случай с шероховатыми опорными поверхностями . . . . .   | 117 |
| 12. Значения геометрических сил . . . . .  | 117 |
| 13. Динамически невозможные начальные движения . . . . .   | 120 |
| 14. Сохраняющаяся неопределенность . . . . .   | 120 |
| 15. Пример. — Две материальные точки, покоящиеся на шероховатой наклонной плоскости и соединенные нитью, проходящей через маленькое неподвижное кольцо . . . . . | 120 |
| <b>IV. Движение материальной точки по движущейся поверхности</b>   | 127 |
| 16. Общая теория. Примеры . . . . .  | 128 |
| <br><b>ГЛАВА 5. Движение твердого тела . . . . .</b>   | 133 |
| <b>I. Движение твердого тела по шероховатой плоскости . . . . .</b>  | 133 |
| 1. Фундаментальные уравнения. Два вида движения . . . . .  | 133 |
| 2. Критерий определения, какое из этих видов движения имеет место  | 135 |
| 3. Пример. — Движение тяжелой сферы по горизонтальной плоскости . . . . .  | 136 |
| 4. Случай чистого вращения . . . . .   | 138 |
| 5. Уравнение движения вокруг мгновенной оси . . . . .  | 140 |
| 6. Геометрическое место точек оси, для которой данное уравнение является истинным . . . . .  | 141 |
| 7. Случай начального движения . . . . .  | 142 |
| 8. Пример. — Движение цилиндра по наклонной плоскости . . . . .  | 143 |
| 9. Движение чистого качения. — Теорема, учитывающая силу ускорения в каждой точке . . . . .  | 146 |
| 10. Определение сопротивления плоскости в точке соприкосновения  | 147 |
| 11. Пример. — Катящаяся сфера . . . . .  | 149 |
| <b>II. Начальное движение твердого тела, покоящегося на одной или более неподвижных шероховатых поверхностях . . . . .</b>                                       | 150 |
| 12. Определение сопротивления опорных поверхностей. — Случай с проскальзыванием в точке соприкосновения . . . . .  | 150 |
| 13. Случай чистого качения . . . . .   | 152 |
| 14. Примеры. — Начальное движение цилиндра по наклонной плоскости . . . . .  | 153 |
| 15. Случай с вертикальной плоскостью. — Кажущийся парадокс . . . . .   | 155 |
| 16. Пример. — Материальная точка, прикрепленная к одному концу жесткого стержня, второй конец которого опирается на стену . . . . .                              | 156 |
| 17. Объяснение кажущегося парадокса . . . . .  | 157 |

18. Пример. — Цилиндры, покоящиеся на наклонной плоскости и соединенные тросом . . . . . 158

## ГЛАВА 6. Обязательное и возможное равновесие . . . . . 164

1. Определение обязательного и возможного равновесия . . . . . 164
2. Статическое и динамическое трение . . . . . 164
3. Ограничения, накладываемые на направления сил динамического трения . . . . . 164
4. Пример. — Три материальные точки, соединенные жесткими стержнями . . . . . 166
5. Пример. — Стержень, лежащий на двух шероховатых стержнях . 167
6. Направление силы статического трения . . . . . 167
7. Сила трения выбирает оптимальное направление для равновесия 168
8. Критерий возможного равновесия . . . . . 169
9. Отличие возможных направлений сил статического и динамического трения . . . . . 169
10. Критерий обязательного равновесия . . . . . 170
11. Пример. — Тяжелая материальная точка, соединенная жестким стержнем с неподвижной точкой, покоящаяся за счет опоры на стену . . . . . 172
12. Случай твердого тела . . . . . 176
13. Пример. — Прямоугольный ящик . . . . . 179
14. Пример. — Т-образный угольник, покоящийся на стенде . . . . 181

## ГЛАВА 7. Определение действительного значения действующей силы трения . . . . . 185

1. Источник неопределенности в уравнениях равновесия. — Истинная природа данного явления . . . . . 185
2. Пример. — Тяжелое тело, покоящееся на горизонтальной плоскости . . . . . 186
3. Пример. — Балка, покоящаяся на двух шероховатых поверхностях 186
4. Пример. — Тяжелое тело, покоящееся на наклонной плоскости . 187

## ГЛАВА 8. Различные задачи . . . . . 192

1. Задача о волчке . . . . . 192
1. Постановка задачи. — Определение сил . . . . . 192
2. Дифференциальные уравнения . . . . . 194
3. Интеграл от этих уравнений . . . . . 195

---

|  |            |
|--|------------|
| 4. Ось быстро становится вертикальной . . . . .                  | 197        |
| 5. Преобразование дифференциальных уравнений . . . . .           | 198        |
| <b>II. Фрикционные колеса . . . . .</b>                          | <b>199</b> |
| 6. Фрикционные колеса. — Три периода движения . . . . .          | 199        |
| 7. Локомотив с единственной парой ведущих колес . . . . .        | 210        |
| 8. Локомотив со сцепленными ведущими колесами . . . . .          | 212        |
| <b>III. Задачи . . . . .</b>                                     | <b>222</b> |
| <b>Примечание А . . . . .</b>                                    | <b>228</b> |
| <b>Примечание В . . . . .</b>                                    | <b>231</b> |
| <b>Примечания редакции . . . . .</b>                             | <b>232</b> |
| <b>Гэллоп Э. Дж. О подъеме оси вращающегося волчка . . . . .</b> | <b>237</b> |
| <b>Список литературы, добавленный при переводе . . . . .</b>     | <b>262</b> |