МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Смагин

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Содержание

нуум. Это множество Кантора, которое строится на $[0,1]$ следующим образом. Из отрезка $[0,1]$ исключается интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; затем из оставшихся двух отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ (*отрезков первого ранга*) исключаются интервалы длины 3^{-2} с центрами в серединах указанных отрезков; затем из оставшихся четырех отрезков (*отрезков второго ранга*) исключаются интервалы длины 3^{-3} с центрами в серединах этих отрезков и так далее до бесконечности. Множество D, оставшееся в $[0,1]$ после исключения всех интервалов, и есть *множество Кантора.* Легко подсчитать, что сумма, длин удаленных из $[0,1]$ интервалов, равна единице. Воспользовавшись задачей 1.6, получим, что D – ММН.

Заметим, что точки множества D делятся на *точки первого рода* – концы удаленных интервалов вместе с точками 0 и 1, и *точки второго рода* – все остальные точки множества D. Очевидно, что множество точек первого рода счетное. Примером точки второго рода может служить число $1/4$. Можно показать, что множество $D \subset [0,1]$ включает те и только те числа отрезка $[0,1]$, которые записываются в виде троичной дроби (конечной или бесконечной), не содержащей единицы в числе своих троичных знаков. Отсюда непосредственно следует, что множество D имеет мощность континуум.

Построим на отрезке $[0,1]$ еще одно множество. Зададим число $\alpha \in (0,1)$. Удалим из отрезка $[0,1]$ интервал длины $\alpha/2$ с центром в середине отрезка; из оставшихся двух отрезков удалим интервалы длины $\alpha/2^3$ с центрами в серединах этих отрезков; из оставшихся четырех отрезков удалим интервалы длины $\alpha/2^5$ с центрами в серединах этих отрезков и так далее. Множество, оставшееся в $[0,1]$ после удаления всех интервалов, обозначим $\widetilde{D}$. Легко подсчитать, что сумма длин удаленных из $[0,1]$ интервалов равна $\alpha < 1$. Воспользовавшись задачей 1.10, получим, что $\widetilde{D}$ не является ММН. Множество $\widetilde{D}$ назовем *множеством Кантора* ненулевой меры.

• Задачи:

1.12. Доказать, что множества Кантора (нулевой и ненулевой меры) являются нигде не плотными.

1.13. Пусть A – ММН на отрезке $[0,1]$ и нигде не плотно на этом отрезке.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Является ли его замыкание $\overline{A}$ – ММН ?

Множество $A \subset [a,b]$ называется *множеством полной меры*, если множество $[a,b] \backslash A$ является ММН.

Если некоторое свойство выполняется на множестве полной меры отрезка $[a,b]$, то говорят, что это свойство выполняется *почти всюду* (п.в.) на $[a,b]$.

Так, например, для функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных на $[a,b]$, обозначение $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ означает, что множество $\{t \in [a,b] \,|\, x(t) \neq y(t)\}$ – ММН.

• Задача.

1.14. Пусть почти всюду на $[a,b]$ задана последовательность функций $\{f_n(t)\}$ такая, что при $n \to \infty$ выполнено $f_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(t)$ и $f_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} g(t)$. Показать, что $f(t) \overset{\text{п.в.}}{=} g(t)$.

Лемма 1. *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

Доказательство. Пусть $A = \cup_i A_i$, где все A_i – ММН. Зададим $\varepsilon > 0$. Каждое множество A_i покроем конечной или счетной системой интервалов $\{\triangle^i_j\}_j$ с суммой длин меньше $\varepsilon/2^i$. Тогда множество A окажется покрытым конечной или счетной системой интервалов $\{\triangle^i_j\}_{i,j}$ такой, что

$$\sum_{i,j} |\triangle^i_j| = \sum_i \sum_j |\triangle^i_j| < \sum_i \varepsilon/2^i \leq \varepsilon.$$

Таким образом, A – ММН. ♡ – конец доказательства.

§ 2. Измеримые функции

Функция $h(t)$ называется *ступенчатой* на отрезке $[a,b]$, если существует разбиение $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ отрезка такое, что в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$ $(i = \overline{1,n})$. Значения функции $h(t)$ в точках деления t_i нас интересовать не будут, поскольку множество $\{t_i\}_{i=0}^n$ – ММН.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Пусть $h(t)$, $k(t)$ – ступенчатые на $[a,b]$ функции. Тогда функция $\varphi(t) = \varphi[h(t), k(t)]$ – ступенчатая на $[a,b]$.*

Доказательство очевидно, если объединить разбиения отрезка $[a, b]$, порожденные функциями $h(t)$ и $k(t)$. ♡

Следствие. *Пусть $h(t)$, $k(t)$ – ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда ступенчатыми являются и следующие функции:*

$$\alpha h(t)\ (\alpha \in \mathbb{R}^1),\ |h(t)|,\ h(t) + k(t),\ h(t)k(t),\ \max\{h(t), k(t)\},\ \min\{h(t), k(t)\}\ .$$

Доказательство. Следует лишь отметить непрерывность функций $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$, что следует, например, из представлений:

$$\max\{x, y\} = 2^{-1}(x + y + |x - y|), \quad \min\{x, y\} = 2^{-1}(x + y - |x - y|). \quad \heartsuit$$

Лемма 3. *Пусть $h(t)$, $k(t)$ – ступенчатые на $[a, b]$ функции и $k(t) \neq 0$ п.в. на $[a, b]$. Тогда частное $h(t)/k(t)$ – ступенчатая на $[a, b]$ функция.*

Для *доказательства* леммы 3, как и в лемме 2, достаточно объединить разбиения отрезка $[a, b]$, порожденные функциями $h(t)$ и $k(t)$. ♡

Вещественная функция $x(t)$, для которой допускаются и бесконечные значения, называется *измеримой* на $[a, b]$, если:

1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;

2) $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$;

3) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций таких, что $h_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} x(t)$ при $n \to \infty$.

Очевидно, что всякая ступенчатая функция измерима.

Заметим также, что если $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$, то и функция $y(t)$ измерима на $[a, b]$.

• Задачи:

2.1. Показать, что на $[0, 1]$ измеримы функции:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \\ 1, & t \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \\ 0, & t \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}.$$

2.2. Пусть множество $A \subset [a, b]$. Рассмотрим

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \setminus A \end{cases}$$