МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Шероховатость поверхности

Учебно-методическое пособие

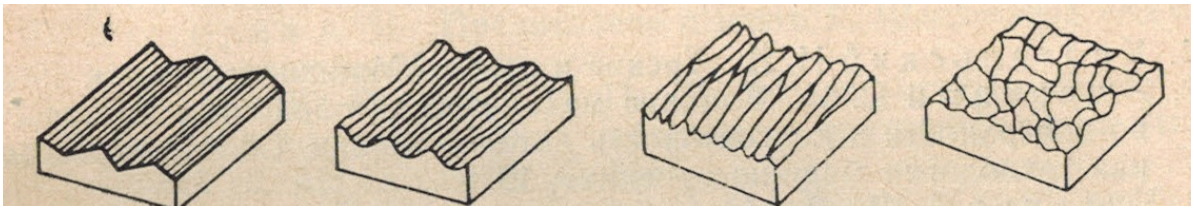
Составитель:
О.И. Иваницева

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

СОДЕРЖАНИЕ

Модель шероховатости можно рассматривать как результат наложения случайной компоненты на детерминированную периодическую основу (рис. 1).

Анализ причин образования неровностей позволяет предложить следующую классификацию шероховатых поверхностей: детерминированная периодическая со случайной фазой (рис. 2,*а*), детерминированная основа с наложенной на нее случайной компонентой (композиционная шероховатость) (рис. 2,*б*), случайная анизотропная (рис. 2,*в*) и случайная изотропная (рис. 2,*г*)



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 2. Классификация шероховатых поверхностей

Индивидуальным особенностям методов и условий обработки поверхности соответствуют различные классы случайных функций.

В случае отсутствия регулярной составляющей профиля шероховатой поверхности его удобно описывать нормальной стационарной случайной функцией $H(x)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(\tau)$. Функция $H(x)$, очевидно, полностью описывается в рамках корреляционной теории, так как если известны ее моменты первых двух порядков, то многомерное нормальное распределение полностью определено.

Однако, многие задачи практики требуют исследования свойств поверхности в целом и изучение ее сечений может оказаться недостаточным. В таких случаях прибегают к моделированию с помощью случайных полей. *Случайным полем*, заданным в R^n, называется случайная функция $H(M) = H(x_1, x_2, ..., x_n)$ от точки $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$, принадлежащей R^n.

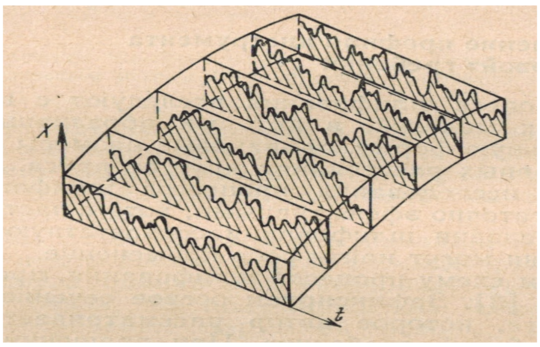


Рис. 3. Набор профилей шероховатой поверхности

Выделяют две двумерные модели вероятностного описания шероховатости. В одной шероховатая поверхность интерпретируется как реализация однородного изотропного случайного поля двух переменных $H(x,y)$, в другой – как реализация поля, полученного из однородного изотропного с помощью невырожденного аффинного преобразования. Поле второго типа является простейшим случаем анизотропного поля. Очевидно, свойство однородности при этом сохраняется.

Для *однородного поля* математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности между аргументами $K(x_1,y_1;x_2,y_2)=K(x_2-x_1;y_2-y_1)$.

Корреляционная функция *изотропного* поля $H(x,y)$ зависит только от расстояния между точками

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Если предполагаются выполненными условия эргодических теорем для моментов поля, то моменты можно вычислять осреднением по площади одной реализации (при достаточно большой площади), а в случае изотропного поля, по его сечению.

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Вектор нормали к шероховатой поверхности

Шероховатости поверхности являются эффективными концентраторами напряжений и могут в несколько раз снижать усталостную прочность. Поэтому представляет интерес оценка напряженного состояния вблизи поверхности тел.

В дальнейшем будем рассматривать пример математической модели шероховатости, предложенный в [2] .

Введем систему криволинейных ортогональных координат q_1,q_2,q_3 и радиус-вектор точки в этой системе обозначим $R=R(q_1,q_2,q_3)$.

Орты касательных к координатным линиям определяются равенствами

$$e_k=\frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_k},\qquad k=1,2,3\,, \tag{2.1}$$

где H_k – коэффициенты Ламэ.

Назовем идеальной такую поверхность, на которой $\mathbf{R}=\mathbf{R}(q_1,q_2,q)$, где $q_3=q=const$.

В векторной записи уравнение шероховатой поверхности представим в виде

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}(q_1, q_2, q) + e_3 H(q_1, q_2), \tag{2.2}$$

где $H(q_1, q_2)$ определяет высоту шероховатостей.

Предположим, что шероховатости малы. Тогда с точностью до малых первого порядка на поверхности (2.1) для координаты q_3 получаем следующее выражение

$$q_3 = q + \frac{H(q_1, q_2)}{H_3(q_1, q_2, q)}.$$

С учетом (2.1) и деривационных формул

$$\frac{\partial e_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\mathbf{e_1},$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\mathbf{e_2}$$

выражения для векторов, касательных к поверхности (2.2), принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_1} &= (H_1 + \frac{H}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3})\mathbf{e_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\mathbf{e_3}, \\ \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_2} &= (H_2 + \frac{H}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3})\mathbf{e_2} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\mathbf{e_3} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда выражение для орта нормали к поверхности (2.2) определится следующим образом

$$n = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_2}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial q_2} \right|},$$

Отсюда с использованием (2.3) и с точностью до величин первого порядка относительно Н и ее производных получается следующее выражение для n

$$n = \mathbf{e_3} - \frac{e_1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{e_2}{H_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}. \tag{2.4}$$

2.2. Постановка граничных условий на шероховатой поверхности

Так как вектор нормали к поверхности со случайными неровностями является случайной функцией координат, то детерминированные поверхностные нагрузки создают на шероховатой поверхности случайное тензорное поле напряжений. Используя (2.4), можно записать

$$\tau_{k3} - \frac{\tau_{k1}}{H_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\tau_{k2}}{H_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} = \pm F_k, \quad k = 1,2,3\,. \tag{2.5}$$

Здесь τ_{ki} – компоненты тензора напряжений в системе координат q_1, q_2, q_3, F_k – внешние поверхностные нагрузки; знак + для случая, когда нормаль (2.4) является внешней к телу, а минус – в противном случае.

Входящие в (2.5) значения напряжений при $q_3 = q + \dfrac{H}{H_3}$ разложим в ряд Маклорена

$$\tau_{ki} = \tau_{ki}\big|_{q3=q} + \frac{H}{H_3}\frac{\partial \tau_{ki}}{\partial q_3}\bigg|_{q_3=q} + \ldots\,. \tag{2.6}$$

Так как поверхностные нагрузки также могут зависеть от H и ее производных, представим F_k в следующем виде

$$F_k = F_k^{(0)} + F_k^{(1)} H\,. \tag{2.7}$$

где $F_k^{(0)}$ – заданная функция криволинейных координат q_1, q_2, q_3, а $F_k^{(1)}$ – заданный линейный оператор. Из (2.5), (2.6), (2.7) с точностью до величин первого порядка относительно H и ее производных следует

$$\tau_{k3} + \frac{H}{H_3}\frac{\partial \tau_{k3}}{\partial q_3} - \frac{\tau_{k1}}{H_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\tau_{k2}}{H_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} = \pm F_k^{(0)} \pm F_k^{(1)} H, \quad k = 1,2,3. \tag{2.8}$$

Граничные условия в форме (2.8) должны удовлетворяться на идеальной поверхности тела $q_3 = q$. Поскольку они строились с учетом величин первого порядка относительно H и ее производных, выражения для напряжений имеет смысл искать с той же степенью точности. Поэтому положим

$$\tau_{ki} = \tau_{ki}^{(0)} + \tau_{ki}^{(1)}, \tag{2.9}$$

где $\tau_{ki} = \tau_{ki}^{(0)}$ – составляющая напряжений, не зависящая от H, а $\tau_{ki}^{(1)}$ – возмущения напряжений, вызванные шероховатостью поверхности.

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɗɏqɏè

Подставляя (2.9) в (2.8) и сохраняя слагаемые до первого порядка относительно $H, \frac{\partial H}{\partial q_i}, \tau_{ki}^{(1)}$, получим граничные условия (при $q_3 = q$) для определения обеих составляющих напряжений

$$\tau_{k3}^{(0)} = \pm F_k^{(0)},$$
$$\tau_{k3}^{(1)} = -\frac{H}{H_3}\frac{\partial \tau_{k3}^{(0)}}{\partial q_3} + \frac{\tau_{k1}^{(0)}}{H_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\tau_{k2}^{(0)}}{H_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} \pm F_k^{(1)} H, k = 1,2,3. \tag{2.10}$$

Кроме граничных условий (2.10), составляющие напряжений $\tau_{k3}^{(0)}, \tau_{k3}^{(1)}$ в области, занятой телом, должны удовлетворять уравнениям линейной теории упругости. Располагая решением этих уравнений для тела с идеальной поверхностью, в силу (2.10) оказывается возможным и построение выражений для напряжений при произвольной (однако достаточно малой) шероховатой поверхности.

Все сказанное справедливо как для изотропного, так и для анизотропного упругих тел. Далее предполагается, что $H = H(q_1, q_2)$ является случайной функцией с нормальным законом распределения.

Случайный характер соотношений (2.10) приводит к необходимости рассмотрения случайного тензорного поля напряжений. Поскольку в граничные условия функция $H = H(q_1, q_2)$ и ее производные входят линейно, то напряжения представляются линейными функционалами Н и, следовательно, имеют нормальный совместный закон распределения. Можно поставить задачу определения зависимости вероятностных характеристик напряжений от вероятностных характеристик функции $H = H(q_1, q_2)$.

§ 3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ

3.1. Напряженное состояние упругой полуплоскости с шероховатой границей при растяжении

Пусть упругая полуплоскость $x \ge H(y)$ с границей $x = H(y)$ находится под действием растягивающих усилий вдоль оси *y*, так что при $x \to \infty$ выполняются условия

$$\sigma_y = \sigma = const, \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \tag{3.1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – составляющие тензора напряжений в системе координат xy (см. рис. 4)