МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Г.Д.Чернышова,
И.Н.Булгакова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

1. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

1.1. Правила построения двойственных задач

1. Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$c^T x \to \max, \tag{1}$$

$$Ax \le b, \tag{2}$$

$$x \ge 0, \tag{3}$$

где $c^T = (c_1, ..., c_n)$, $x^T = (x_1, ..., x_n)$, $b^T = (b_1, ..., b_n)$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Функция Лагранжа для задачи (1) – (3) записывается в виде

$$L(x,y) = c^T x + y^T (b - Ax) = c^T x + \sum y_i \left(b_i - (Ax)_i\right), \; x \ge 0, \; y \ge 0.$$

Задачу (1) – (3) можно эквивалентно переписать следующим образом:

$$\max_{x \ge 0} \min_{y \ge 0} L(x,y),$$

так как для любого фиксированного $\hat{x} \ge 0$ имеет место равенство

$$\min\left[c^T \hat{x} + \sum y_i \left(b_i - (A\hat{x})_i\right)\right] = c^T \hat{x}, \text{ при } b_i \ge (A\hat{x})_i.$$

Двойственная задача по определению записывается в виде

$$\min_{y \ge 0} \max_{x \ge 0} L(x,y),$$

где $L(x,y) = b^T y + x^T \left(c - A^T y\right), x \ge 0, y \ge 0$.

Зафиксируем произвольное $y \ge 0$. Тогда имеют место равенства

$$\max_{x \ge 0} L(x,y) = \max_{x \ge 0}\left[b^T y + x^T\left(c - A^T y\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} +\infty, \text{ если } \exists j : c_j - \left(A^T y\right)_j > 0, \\ b^T y, \text{ если } \forall j : c_j - \left(A^T y\right)_j \le 0 \text{ или } A^T y \ge c. \end{cases}$$

Таким образом, двойственную задачу можно записать в следующем виде:

ђqddyeY bЁ dedЁbYзe d eoaбcoy Jqddyqyè

Таким образом, под двойственной задачей (ДЗ) к исходной понимается задача линейного программирования, которая строится по следующим правилам, приведенным в таблице.

Исходная задача	Двойственная задача
$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$	$y_i \ge 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$	$y_i \le 0$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	y_i – любого знака
$x_j \ge 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$
$x_j \le 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$
x_j – любого знака	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Примечание. Когда целевая функция в исходной задаче минимизируется, таблица прочитывается справа налево.

Данная таблица позволяет формулировать несколько общих правил построения двойственных задач:

- каждому i-му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i в ДЗ, и, наоборот, каждому k-му ограничению ДЗ соответствует переменная x_k исходной задачи;
- матрицы ограничений в исходной и двойственной задачах взаимно транспонированы;
- правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции в ДЗ, а коэффициенты целевой функции исходной задачи – правыми частями ограничений в ДЗ;
- если целевая функция в исходной задаче максимизировалась (минимизировалась), то в ДЗ целевая функция минимизируется (максимизируется).

1.2. Свойства пары двойственных задач

Обозначим через Ω и Q соответственно допустимые множества исходной задачи (1) – (3) и двойственной задачи (4) – (6):

$$\Omega = \left\{x : Ax \le b, x \ge 0\right\},$$

$$Q = \left\{y : A^T y \ge c, y \ge 0\right\}.$$

1. Задача, двойственная к двойственной, является исходной. Запишем задачу (4) – (6) в виде

$$-b^T y \to \max,$$
$$-A^T y \le -c,$$
$$y \ge 0,$$

двойственная к которой по определению имеет вид

$$\begin{array}{ccc} -c^T x \to \min, & & c^T x \to \max, \\ -A^T x \ge -b, & \text{или} & A^T x \le b, \\ x \ge 0, & & x \ge 0. \end{array}$$

2. Для любых $x \in \Omega$ и $y \in Q$ имеет место неравенство $c^T x \le b^T y$. Действительно, всегда справедливы соотношения

$$c^T x = x^T c \underset{\forall y \in Q}{\le} x^T A^T y = y^T Ax \underset{x \in \Omega}{\le} y^T b = b^T y.$$

3. Если в одной из задач (исходной или двойственной) отсутствует решение из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве, то в двойственной к ней допустимое множество пусто.

Например, если $\sup\limits_{\Omega} c^T x = +\infty$, то $Q = \varnothing$.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $Q \ne \varnothing$, тогда $\exists \hat{y} \in Q$.

Используя свойство 2, запишем неравенство $c^T x \le b^T \hat{y}$, $\forall x \in \Omega$, что противоречит неограниченности целевой функции $c^T x$ на множестве Ω.

4. Если $\exists \hat{x} \in \Omega$ и $\exists \hat{y} \in Q$ такие, что $c^T \hat{x} = b^T \hat{y}$, то $\hat{x}$ – решение исходной задачи, $\hat{y}$ – решение двойственной задачи.

Из свойства 2 следует, что $\forall x \in \Omega$ можно записать $c^T x \le b^T \hat{y} = c^T \hat{x}$. Следовательно, $\hat{x}$ – решение исходной задачи.

5. Возможна ситуация: $\Omega = \varnothing$ и $Q = \varnothing$.

Рассмотрим пример. Исходная задача задана в виде

$$3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Допустимое множество $\Omega = \varnothing$.

Двойственная к исходной запишется следующим образом:

$$4y_1 + 2y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3, \\ y_1 + y_2 = 2. \end{cases}$$

Допустимое множество $Q = \varnothing$.

6. Пусть $\Omega \neq \varnothing$ и $Q = \varnothing$, тогда исходная задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве.

7. Если $\Omega \neq \varnothing$ и $Q \neq \varnothing$, то обе задачи имеют решение.

Первая теорема двойственности

Если одна из задач (исходная или двойственная) имеет решение, то и вторая имеет решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают.

Доказательство.

Пусть задана задача в каноническом виде

$$c^T x \to \max,$$
$$Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

И пусть она имеет решение x^0, полученное, например, симплекс-методом.

Двойственная задача записывается в виде

$$b^T y \to \min,$$
$$A^T y \geq c.$$

Точка x^0 является базисной, $x^0 = \begin{bmatrix} x_b \\ 0 \end{bmatrix}$, где $x_b = B^{-1}b$. Пусть B – оптимальный базис, тогда оптимальность означает выполнение условий

$$\Delta_j = c_b^T B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \ \forall j = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $y^0 = c_b^T B^{-1}$. Тогда $A^T y^0 \geq c$, то есть точка y^0 – допустимая в двойственной задаче.