МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

А.В. БРАТИЩЕВ, А.В. МОРЖАКОВ

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Получено интегральное представление резольвенты оператора обобщенного дифференцирования, коэффициенты порождающей функции $d(z):=\sum_{n=0}^{\infty}p(n+1)z^n$ *которого являются многочленом своего номера.*

***Ключевые слова**: резольвента, оператор обобщенного дифференцирования.*

Фиксируем многочлен

$$p(x)=a_0x^s+a_1x^{s-1}+\ldots+a_s=\sum_{k=0}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}x(x-1)\ldots(x-k+1),$$

где $\alpha_0\neq 0$, $\alpha_k\in \mathrm{C}$. $\forall k\in \mathrm{N}$, $p(k)\neq 0$, Δ_k – разделенная разность, построенная по узлам $0,1,\ldots,k$ и значениям $p(0),\ldots p(k)$. Очевидно, $\Delta_0=a_s$, $\Delta_s=s!a_0$. Определим оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда – Леонтьева на пространстве многочленов по правилу $Dz^n:=p(n)z^{n-1},\ n\in\mathrm{N},\ D1:=0$.

ЛЕММА. *Пусть функция* $y(z)$ *голоморфна в односвязной области* $G\subseteq\mathrm{C}$ и $0\in G$. Тогда $\forall z\in G$ $[Dy](z)=a_s\dfrac{y(z)-y(0)}{z}+\sum_{k=1}^{s}\dfrac{\Delta_k}{k!}z^{k-1}y^{(k)}(z)$.

Предполагая D расширяющимся до линейного непрерывного оператора в пространстве $H(G)$ голомофных в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах, найдем ядро этого оператора. Согласно [1], для $0,z\subset \operatorname{int}C\subset G$

$$\left[Dt^n\right](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C t^nk(t,z)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}t^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k_l(z)}{t^{l+1}}dt=k_n(z)=p(n)z^{n-1},\quad [D1](z)=k_0(z)\equiv 0,$$

откуда

$$k(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\frac{z^{n-1}}{t^{n+1}}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\varsigma^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\right)\varsigma^{n-1}=$$

$$=\Delta_0\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma^{n-1}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}n\ldots(n-k+1)\varsigma^{n-1}=\frac{\Delta_0}{1-\varsigma}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k\varsigma^{k-1}}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varsigma^n\right)^{(k)}=\frac{\Delta_0}{1-\varsigma}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k\varsigma^{k-1}}{(1-\varsigma)^{k+1}}.$$