

УДК 517.518.45  
ББК 22.16  
А 70

**Рецензенты:**

докт. техн. наук проф. Лисов А.А. (МАТИ, техн. университет);  
канд. физ.-мат. наук доц. Мягкова М.П. (МЭИ, техн. университет).

**Шмелев П.А., Шмелева Г.А., Фураев А.Н.**

**А 70** Пособие по Высшей математике для Вузов физкультурного  
профиля. Элементы математического анализа: Учебное пособие - М.:  
МГАФК, 1999 - 190 с.: ил.

ISBN 5-900871-26-6

Пособие соответствует программам курсов высшей математики для вузов указанного профиля. Оно содержит элементы дифференциального и интегрального исчислений, начала теории дифференциальных уравнений.

Предназначено для студентов младших курсов вузов физкультурного профиля.

Пособие подготовлено на кафедре биомеханики и компьютерной технологии.

ISBN 5-900871-26-6

ББК 22.16

© П.А. Шмелев, Г.А. Шмелева, А.Н. Фураев  
© МГАФК, 1999

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой 2-ю часть учебного пособия по началам аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории вероятностей и математической статистики для вузов физкультурного профиля. Разумеется, в России имеется богатая литература по всем указанным разделам. Однако, на сколько известно авторам, в России нет учебника, достаточно элементарного, специально приспособленного для студентов – спортсменов и тренеров. Предлагаемая книга имеет целью в какой-то степени восполнить этот пробел. Перед авторами стояла нелегкая задача по отбору материала и по методике его изложения. Насколько авторам справились с этой задачей – судить специалистам и читателю.

Во вторую часть пособия вошли разделы: Функция, пределы функций, элементы дифференциального и интегрального исчислений, начала теории дифференциальных уравнений.

Каждый раздел подразделен на главы, а каждая глава – на параграфы.

Формулы, приведенные в книге, имеют сквозную нумерацию. Однако, часть формул, на которые имеются ссылки только в данном параграфе и которые, как правило, фиксируют промежуточные результаты в выкладках, обозначены прописными буквами русского алфавита (в каждом параграфе эти обозначения повторяются).

В книге приняты следующие обозначения:

$N$  – множество натуральных чисел;

$Z$  – множество целых чисел;

$R$  – множество действительных чисел.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам рукописи проф. Лисову А.А. (МАТИ) и доц. Мягковой М.П. (МЭИ) за замечания, способствующие улучшению пособия.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ГЛАВА 1.

#### ФУНКЦИЯ

1. Множество.....	7
2. Операции над множествами.....	9
3. Общее определение функции.....	12
4. Действительная функция действительной переменной и способы ее задания.....	14
5. Область определения функции, заданной аналитическим способом.....	15
6. Классификация функций, задаваемых аналитическим способом.....	17
7. График функции.....	18
8. Четные, нечетные и периодические функции.....	20
9. Основные элементарные функции и их графики.....	23
10. Понятие сложной функции. Элементарные функции.....	26
11. Графики функций $f(x)+b$ , $f(x+a)$ , $f(x+a)+b$ .....	29
12. Квадратичная функция.....	31
13. Графики функций $ f(x) $ , $f( x )$ , $ f( x ) $ .....	33
14. Графики функций $Af(x)$ , $f(kx)$ , $Af(kx+a)$ .....	35
15. Графики функций $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt[3]{f(x)}$ .....	38
16. Построение графиков суммы и произведения двух функций.....	42

### ГЛАВА 2.

#### ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

17. Понятие предела функции в точке.....	43
18. Свойства функций, имеющих предел.....	45
19. Замечательные пределы.....	48
20. Бесконечно малые в точке функции.....	51
21. Бесконечно большие в точке функции и их связь с бесконечно малыми.....	52
22. Непрерывность функции в точке.....	53
23. Непрерывность элементарных функций.....	58

### ГЛАВА 3.

#### ПРОИЗВОДНАЯ

24. Задача о проведении касательной к данной кривой.....	60
25. Задача о вычислении мгновенной скорости прямолинейно движущейся точки.....	61

26. Понятие производной от функции в точке.....	63
27. Вычисление производных от основных элементарных функции.....	64
28. Непрерывность функции, имеющей производную.....	68
29. Производная суммы, произведения и частного.....	70
30. Производная сложной функции.....	73
31. Вычисление производных обратных функций.....	75
32. Таблица производных сложных функций.....	78
33. Дифференциал функции.....	80
34. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.....	83
35. Производные высших порядков.....	84
36. Механический смысл производной второго порядка.....	86
37. Численное дифференцирование.....	87

#### ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

38. Исследование функций на возрастание и убывание.....	90
39. Экстремумы функций.....	93
40. Достаточные условия существования экстремума.....	95
41. Исследование функций на возрастание, убывание и экстремум в областях их определения.....	97
42. Задачи на экстремум практического содержания.....	99
43. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.....	102
44. Второе правило исследования функции на экстремум.....	104
45. Правило Лопиталя.....	106
46. Асимптоты графика функции.....	109
47. Общая схема исследования функции.....	113

#### ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

48. Первообразная данной функции.....	116
49. Понятие неопределенного интеграла.....	117
50. Таблица неопределенных интегралов.....	119
51. Свойства неопределенных интегралов.....	121
52. Интегрирование функций с помощью подведения множителей под знак дифференциала.....	124
53. Интегрирование по частям.....	126
54. Интегрирование методом подстановки.....	127
55. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.....	130

56. Определенный интеграл.....	132
57. Основные свойства определенного интеграла.....	134
58. Оценка определенного интеграла.....	137
59. Теорема о среднем.....	138
60. Теорема о производной определенного интеграла по верхнему пределу.....	140
61. Формула Ньютона-Лейбница.....	142
62. Определенное интегрирование по частям.....	144
63. Замена переменной в определенных интегралах.....	147
64. Применения определенного интеграла.....	149
65. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	152

## ГЛАВА 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

66. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.....	156
67. Понятия о дифференциальном уравнении и его решениях.....	159
68. Задача Коши для дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков.....	161
69. Непосредственно интегрируемые дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков.....	162
70. Метод ломаных Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка.....	164
71. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.....	166
72. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$ .....	168
73. Однородные дифференциальные уравнения.....	170
74. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	172
75. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.....	174
76. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.....	175
77. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.....	178
78. Простейшие случаи метода подбора для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.....	179
79. Исследование колебательного процесса.....	184