РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ИНСТИТУТ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ

Ефремов Александр Петрович

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАТЕРНИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗИ С СИСТЕМАМИ ОТСЧЕТА И ФИЗИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Монография

Москва 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Создание алгебры кватернионных чисел заслуженно связывается с именем Уильяма Роуэна Гамильтона, который в 1843 г. окончательно сформулировал правило умножения четырех базисных единиц алгебры[1]. Известно, однако, что некоторые соотношения кватернионной алгебры рассматривались еще в XVIII веке Л.Эйлером и К.Гауссом [2], [3], а в 1840 г. О.Родригес, исследуя кинематику твердого тела, записал выражение, сходное с правилом умножения кватернионов [4], [5]. Во всех случаях эти ученые приходили к кватернионным соотношениям, основываясь на модельных структурах механики и трехмерной геометрии.

У.Гамильтон был, видимо, первым, кто поставил перед собой задачу построения именно математической структуры – столь же самосогласованной и завершенной, как и алгебра комплексных чисел, но – не на двумерной поверхности, а в некотором пространстве. Как известно, эта задача была успешно решена, но результат вышел весьма неожиданным. Умножение чисел новой алгебры оказалось некоммутативным, ее базисные единицы были связаны между собой серией нелинейных соотношений. Более того, число единиц оказалось равным четырем, то есть размерность искомого пространства на единицу превысила размерность привычного по опыту физического пространства конфигураций. Наконец, возникла дилемма определения кватернионных коэффициентов: ими могли быть как действительные, так и комплексные числа, хотя последние, вообще говоря, алгебру несколько ухудшали (не всегда определялась норма числа, пропадала общность деления).

Родившийся новый математический объект – кватернионная алгебра – вызвал большой энтузиазм и не меньшую озабоченность, прежде всего, у его автора. В главных работах

[1] Обзор истории создания и развития кватернионного исчисления приведен в работе [1].

У.Гамильтона [6], [7] с очевидностью прослеживаются две цели:

- разобраться в геометрической (если угодно – в физической, в те времена – в механической) сущности кватернионов,
- передать читателям, ученикам представление (не исключено, что интуитивное) об их безусловной важности для последующего развития и эксплуатации точных наук.

Ни одна из этих целей автором, да и его учениками достигнута не была, несмотря на то, что Гамильтон остаток своей жизни, по сути, посвятил изучению и пропаганде кватернионов.[2] Объект оказался слишком сложным для своего времени. Несмотря на усилия последователей Гамильтона, в первую очередь, П.Г.Тэта [8] и даже на тот факт, что именно на языке кватернионов Дж.Максвелл впервые записал свои уравнения электродинамики [9] и понимал это исчисление как некую «универсальную арифметику» [10], в математике и физике весьма скоро возобладала более практичная, но иная в своей основе и несколько эклектичная векторная алгебра Д.Гиббса и О.Хэвисайда; кватернионное исчисление отодвинулось на второй план.

Не слишком многого удалось достичь и в понимании геометрической сущности кватернионов, хотя то, что в этой математике лежит на поверхности, было замечено сразу: «специальные кватернионы» – «мнимые» кватернионные единицы – уже Гамильтоном однозначно связывались с триадой направляющих векторов декартовой системы координат. Собственно, это было и все. Даже ставшая довольно быстро знаменитой кватернионная методика расчета векторных поворотов явилась, всего лишь технологическим инструментом, действующим, скорее, загадочно (потому что так получается!), нежели де-

[2] Как и Эйнштейн – почти 40 лет после создания им теории относительности безуспешно пытался создать на ее базе единую теорию поля.

тально проанализированным. Да и в дальнейшем кватернионы использовались более как математический аппарат, удобный (а иногда и искусственно подгоняемый) для решения математических и физических задач.

Анализ литературных источников создает впечатление, что исследование собственно математики кватернионов как таковой, в том числе ассоциированной геометрии, в конце XIX века, по существу, остановилось. Значимыми этапами этого периода явились работы К.Клиффорда (включившие изучение комплексных кватернионов, или бикватернионов; см., например, [11]), а также доказательство теорем Фробениуса-Гурвица (подробное изложение дано в работе [12]) об исключительности – в смысле «хорошего» определения действий над числами – алгебры кватернионных чисел и следующей по размерности алгебры октав.

Дальнейшее исследование кватернионов не было отмечено сколь либо значимыми событиями, несмотря на то, что интерес к ним определенно сохранялся. В начале XX века в Европе даже было создано «Международное общество содействия изучению кватернионов». Оно просуществовало до начала первой мировой войны, после чего по известным причинам распалось. Последовавшее вскоре бурное развитие экспериментальной физики потребовало привлечения множества различных математических аппаратов для описания наблюдаемых явлений. Целенаправленная разработка методов описания распространения полей, квантовых и статистических явлений не способствовала углублению понимания «старого» и «неудобного» аппарата кватернионной алгебры. Даже Э.Картан, один из основоположников теории подвижного репера, оставил без внимания отмеченную еще Гамильтоном возможность использования триады «специальных кватернионов» в качестве пространственной составляющей системы отсчета.

В начале XX века публикации, связанные с кватернионами, носят, в основном прикладной характер. Известны работы по теории винтов А.Котельникова [13] и Э.Штуди [14]; рядом