

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Составители:
А.Я. Аснина,
Н.Г. Аснина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Глава 1. Общая постановка задачи линейного программирования. | |
| Графическое решение задач линейного программирования. | |
| Каноническая форма. Базисное решение..... | 4 |
| 1.1. Основные определения..... | 4 |
| 1.2. Способы записи задачи линейного программирования..... | 5 |
| 1.3. Представление экономических задач в виде ЗЛП..... | 6 |
| 1.3.1. Задача формирования плана предприятия..... | 6 |
| 1.3.2. Задача о формировании рациона..... | 7 |
| 1.4. Графический метод решения задачи линейного программирования..... | 8 |
| <i>Лабораторная работа № 1</i> | <i>13</i> |
| 1.5. Каноническая форма задачи линейного программирования. | |
| Приведение к канонической форме | 14 |
| 1.6. Базисное решение ЗЛП..... | 17 |
| 1.7. Перестроение базисного решения ЗЛП | 18 |
| <i>Лабораторная работа № 2</i> | <i>21</i> |
| Глава 2. Симплекс-метод | 21 |
| 2.1. Основная теорема линейного программирования..... | 21 |
| 2.2. Алгоритм симплекс-метода | 22 |
| <i>Лабораторная работа № 3</i> | <i>24</i> |
| 2.3. Симплекс-метод с искусственным базисом | 24 |
| <i>Лабораторная работа № 4</i> | <i>30</i> |
| Глава 3. Двойственность в задачах линейного программирования | 30 |
| 3.1. Основные понятия и определения..... | 30 |
| 3.2. Леммы и теоремы двойственности | 36 |
| 3.3. Экономический смысл двойственной задачи..... | 40 |
| <i>Лабораторная работа № 5</i> | <i>41</i> |
| Глава 4. Транспортная задача..... | 41 |
| 4.1. Математическая модель транспортной задачи | 41 |
| 4.2. Решение транспортной задачи. Метод потенциалов..... | 45 |
| 4.3. Транспортные задачи, имеющие усложнения в постановке | 54 |
| <i>Лабораторная работа № 6</i> | <i>60</i> |
| Список литературы | 62 |

$$\begin{aligned}x_j &\geq 0, \quad (j = \overline{1, k_1}), \\x_i &\geq 0, \quad (i = \overline{1, k_2}), \\1 &\leq k_1 \leq k_2 \leq n \\f(x) = c^T x &\rightarrow \max_{(\min)}.\end{aligned}$$

1.3. Представление экономических задач в виде ЗЛП

Многие экономические задачи сводятся к задачам линейного программирования.

Вербальной моделью называется описание на языке предметной области основных свойств и зависимостей исследуемого объекта или проекта.

Математическая модель – это описание с помощью математических символов основных свойств и зависимостей, описанных вербальной моделью.

1.3.1. Задача формирования плана предприятия

Вербальная модель

Имеем предприятие, которое может выпускать n различных видов изделий. Для выпуска данных изделий необходимо m различных видов ресурсов. Пусть b_i – лимит i -го ресурса на предприятии, a_{ij} – расход i -го ресурса на единицу j -го вида продукции, c_j – прибыль от реализации одной единицы j -го вида продукции. Требуется сформировать план предприятия, обеспеченный всеми ресурсами и дающий максимально возможную прибыль.

Математическая модель

Формируем план:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где x_j – количество продукции j -го вида в плане, тогда весь план задается вектором x .

Так как план должен быть обеспечен всеми ресурсами, то получаем ограничение $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}$. Здесь левая часть неравенства описывает количество ресурсов, которое будет израсходовано для выполнения плана x . При этом при выполнении плана x будет получена прибыль $\sum_{j=1}^n c_j x_j$.

Окончательный вид математической модели будет следующий:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

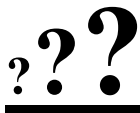
$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

или

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max.$$



Задание для самостоятельной работы

Фабрика выпускает продукцию двух видов: П1 и П2. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства этой продукции используются три исходных продукта: А, В, С. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов, расходы продуктов (сырья) А, В, С на 1 тыс. изделий, а также оптовая цена Z 1 тыс. шт. изделий П1 и П2 приведены в таблице.

| Исходный продукт | Расход исходных продуктов на 1 тыс. изделий | | Максимально возможный запас (Т) |
|------------------|---|-----|---------------------------------|
| | П1 | П2 | |
| А | 1 | 2 | 6 |
| В | 2 | 1 | 8 |
| С | 1 | 0,8 | 5 |
| Z | 3 | 2 | |

Какое количество изделий (в тыс. шт.) должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Запишите математическую модель этой задачи.

1.3.2. Задача о формировании рациона

Вербальная модель

Для составления дневного рациона имеем в наличии n различных кормов. Для получения сбалансированного рациона (белки, витамины, микроэлементы и др.) необходимо, чтобы в него входило m различных ингредиентов, причем каждый i -й ингредиент должен входить в количестве не меньше b_i ($i = \overline{1, m}$), a_{ij} – количество i -го ингредиента в одной единице j -го вида корма, c_j – стоимость одной единицы j -го корма.

Требуется сформировать ежедневный рацион так, чтобы он был обеспечен всеми необходимыми ингредиентами и имел минимальную стоимость.

Математическая модель

Введем вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – рацион, где x_j – количество j -го вида корма в

рационе.

По аналогии с предыдущей задачей математическая модель задачи формирования рациона будет иметь вид

$$Ax \geq b, \quad (1.4)$$

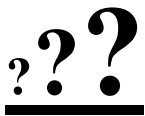
$$x \geq 0, \quad (1.5)$$

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max \quad (1.6)$$

Заметим, что полученная математическая модель недостаточно адекватно отражает искомую цель, т.к. в вербальной модели описаны не все необходимые зависимости.

В самом деле, если предположить, что среди выбранных кормов присутствует, например, прошлогодняя солома, стоимость которой равна нулю, а все имеющиеся ингредиенты присутствуют в ней в исчезающе малых количествах, то при решении задачи может получиться, что ежедневный рацион должен состоять только из прошлогодней соломы и составлять, например, пятнадцать тонн, что, разумеется, невозможно.

Отсюда следует, что ограничение (1.5) необходимо заменить на $0 \leq x \leq D$, где D – вектор верхних границ переменных x_j .



Задание для самостоятельной работы

Если (1.4)–(1.5) оставить в исходном виде, то какие еще «неприятности» мы можем получить в оптимальном плане?

1.4. Графический метод решения задачи линейного программирования

Если задача линейного программирования имеет две переменные: x_1 и x_2 , то ее можно решить графически.

Решение задачи происходит в два этапа.

На первом этапе необходимо на плоскости изобразить допустимое множество, а на втором найти оптимальную точку, если она существует, в противном случае убедиться в неразрешимости задачи.