МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Составители:
А.Я. Аснина,
Н.Г. Аснина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

Содержание

$$x_j \geq 0,\ \ (j = \overline{1, k_1}),$$
$$x_i \geq 0,\ \ (i = \overline{1, k_2}),$$
$$1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$$
$$f(x) = c^T x \to \max_{(\min)}.$$

1.3. Представление экономических задач в виде ЗЛП

Многие экономические задачи сводятся к задачам линейного программирования.

Вербальной моделью называется описание на языке предметной области основных свойств и зависимостей исследуемого объекта или проекта.

Математическая модель – это описание с помощью математических символов основных свойств и зависимостей, описанных вербальной моделью.

1.3.1. Задача формирования плана предприятия

Вербальная модель

Имеем предприятие, которое может выпускать n различных видов изделий. Для выпуска данных изделий необходимо m различных видов ресурсов. Пусть b_i – лимит i-го ресурса на предприятии, a_{ij} – расход i-го ресурса на единицу j-го вида продукции, c_j – прибыль от реализации одной единицы j-го вида продукции. Требуется сформировать план предприятия, обеспеченный всеми ресурсами и дающий максимально возможную прибыль.

Математическая модель

Формируем план:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где x_j – количество продукции j-го вида в плане, тогда весь план задается вектором x.

Так как план должен быть обеспечен всеми ресурсами, то получаем ограничение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b, i = \overline{1, m}$. Здесь левая часть неравенства описывает количество ресурсов, которое будет израсходовано для выполнения плана x. При этом при выполнении плана x будет получена прибыль $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Окончательный вид математической модели будет следующий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

или

$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0,$$
$$f(x) = c^T x \to \max.$$

???

Задание для самостоятельной работы

Фабрика выпускает продукцию двух видов: П1 и П2. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства этой продукции используются три исходных продукта: A, B, C. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов, расходы продуктов (сырья) A, B, C на 1 тыс. изделий, а также оптовая цена Z 1 тыс. шт. изделий П1 и П2 приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 тыс. изделий		Максимально возможный запас (Т)
	П1	П2	
A	1	2	6
B	2	1	8
C	1	0,8	5
Z	3	2	

Какое количество изделий (в тыс. шт.) должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Запишите математическую модель этой задачи.

1.3.2. Задача о формировании рациона

Вербальная модель

Для составления дневного рациона имеем в наличии n различных кормов. Для получения сбалансированного рациона (белки, витамины, микроэлементы и др.) необходимо, чтобы в него входило m различных ингредиентов, причем каждый i-й ингредиент должен входить в количестве не меньше b_i $(i = \overline{1, m})$, a_{ij} – количество i-го ингредиента в одной единице j-го вида корма, c_j – стоимость одной единицы j-го корма.

Требуется сформировать ежедневный рацион так, чтобы он был обеспечен всеми необходимыми ингредиентами и имел минимальную стоимость.

Математическая модель

Введем вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – рацион, где x_j – количество j-го вида корма в рационе.

По аналогии с предыдущей задачей математическая модель задачи формирования рациона будет иметь вид

$$Ax \geq b, \tag{1.4}$$

$$x \geq 0, \tag{1.5}$$

$$f(x) = c^T x \to \max \tag{1.6}$$

Заметим, что полученная математическая модель недостаточно адекватно отражает искомую цель, т.к. в вербальной модели описаны не все необходимые зависимости.

В самом деле, если предположить, что среди выбранных кормов присутствует, например, прошлогодняя солома, стоимость которой равна нулю, а все имеющиеся ингредиенты присутствуют в ней в исчезающее малых количествах, то при решении задачи может получиться, что ежедневный рацион должен состоять только из прошлогодней соломы и составлять, например, пятнадцать тонн, что, разумеется, невозможно.

Отсюда следует, что ограничение (1.5) необходимо заменить на $0 \leq x \leq D$, где D – вектор верхних границ переменных x_j.

??? Задание для самостоятельной работы

Если (1.4)–(1.5) оставить в исходном виде, то какие еще «неприятности» мы можем получить в оптимальном плане?

1.4. Графический метод решения задачи линейного программирования

Если задача линейного программирования имеет две переменные: x_1 и x_2, то ее можно решить графически.

Решение задачи происходит в два этапа.

На первом этапе необходимо на плоскости изобразить допустимое множество, а на втором найти оптимальную точку, если она существует, в противном случае убедиться в неразрешимости задачи.