

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**С. Д. Глызин, А. О. Толбей**

# **ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по специальностям  
Прикладная математика и информатика и  
Прикладная математика в экономике*

Ярославль 2011

УДК 517.91  
ББК В 161.61я73  
Г 55

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензенты:

Цыганков М. П., доктор физико-математических наук, профессор;  
кафедра теории и методики обучения информатике Ярославского государственного  
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

**Глызин, С. Д.** Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / С. Д. Глызин, А. О. Толбей; Яросл. гос. ун-т, им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 68 с.  
Г 55 ISBN 978-5-8397-0816-7

В книге содержатся материалы для упражнений по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения», она включает в себя краткое изложение методов решения, проиллюстрированное подробным разбором, ряда задач, а также подборку заданий для контрольных работ по курсу.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 010200.65 Прикладная математика и информатика и 080801.65 Прикладная математика в экономике, дисциплина «Дифференциальные уравнения» (блок ЕН), очной формы обучения.

Рис. 10. Библиогр.: 11 назв.

УДК 517.91  
ББК В 161.61я73

ISBN 978-5-8397-0816-7

© Ярославский  
государственный университет  
им. П. Г. Демидова, 2011

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка</b>	<b>5</b>
1.1. Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	6
1.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	11
1.3. Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	15
1.4. Варианты контрольной работы № 1 . . . . .	17
<b>2. Линейные дифференциальные уравнения и системы</b>	<b>20</b>
2.1. Линейные дифференциальные уравнения старших порядков с постоянными коэффициентами . . . . .	20
2.2. Формула Остроградского–Лиувилля . . . . .	26
2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	27
2.4. Матричная экспонента и способы ее вычисления . . . . .	36
2.5. Варианты контрольной работы № 2 . . . . .	38
2.6. Варианты контрольной работы № 3 . . . . .	40
<b>3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений</b>	<b>43</b>
3.1. Первый метод Ляпунова . . . . .	44
3.2. Метод функций Ляпунова . . . . .	48
3.3. Построение фазового портрета системы на плоскости . . . . .	52
3.4. Варианты контрольной работы № 4 . . . . .	57
<b>4. Последовательные приближения и метод малого параметра</b>	<b>60</b>
4.1. Метод последовательных приближений Пикара . . . . .	60
4.2. Метод малого параметра . . . . .	61
4.3. Краевые задачи . . . . .	63
4.4. Варианты контрольной работы № 5 . . . . .	65
<b>Литература</b>	<b>67</b>

## Введение

Пособие для практических занятий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» содержит подборку задач с решениями и кратким изложением необходимых теоретических сведений. Материал разделен на четыре главы.

В первой из них обсуждаются уравнения первого порядка. Подробно рассматриваются уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, а также некоторые сводящиеся к ним. Глава завершается вариантами контрольной работы по уравнениям первого порядка.

Вторая глава посвящена линейным уравнениям старших порядков и системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В первую очередь и достаточно подробно рассмотрены уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Для неоднородных уравнений и систем изложен метод неопределенных коэффициентов и метод вариации произвольных постоянных. Для линейных уравнений с непостоянными коэффициентами рассмотрены способы понижения порядка уравнения с помощью теоремы Остроградского–Лиувилля в случае, когда известно какое-либо нетривиальное решение. В главе также обсуждаются методы построения матричной экспоненты. В силу важности данной темы по линейным уравнениям и системам запланировано две контрольные работы, в конце второй главы содержится подборка соответствующих задач.

Задачи по теории устойчивости и некоторые связанные с ними вопросы рассмотрены в третьей главе. В частности, обсуждаются практические аспекты применения первого и второго методов Ляпунова, приведены примеры использования критериев устойчивости многочленов. В главе также содержится сводка правил построения и результатов решения задач по определению фазового портрета линейной системы с постоянными коэффициентами на плоскости. Как и предыдущие главы, данная глава завершается вариантами контрольной работы по этой теме.

В последней главе пособия собраны задачи на построение методом последовательных приближений и методом малого параметра приближенных решений начальной задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений. В третьей части главы обсуждаются способы и приводится пример решения краевых задач и построения функции Грина. Как обычно, глава завершается вариантами контрольной работы.

Наша книга не ставит целью дать свод задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям, для этого имеются ряд специализированных сборников задач [1–6], среди которых в первую очередь следует отметить книгу А. Ф. Филипова, пережившую большое количество переизданий (см., например, [1, 2]) и сборник коллектива авторов (М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко) [3]. Пособие в большей степени предназначено для того, чтобы проиллюстрировать ряд ключевых проблем, изучаемых в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, и способствовать лучшему пониманию и усвоению соответствующего материала.